

第1章 | 数と式



第1節 式の計算

1 多項式の加法と減法

A 単項式と多項式

まとめ

1 単項式

3, x , $-2a$, $(-5)x^2y$ などのように, 数や文字およびそれらを掛けて作られる式を単項式という。また, ふつう $1x$ は単に x と書き, $(-5)x^2y$ は () をはずして $-5x^2y$ と書く。 x^2 の肩つきの数2を, x^2 の指数という。 x や a の指数はともに1である(本書の9ページを参照)。

単項式では, 数の部分をその単項式の係数といい, 掛けた文字の個数をその単項式の次数という。数だけの単項式の次数は0である。ただし, 数0の次数は考えない。

単項式が2種類以上の文字を含むとき, 特定の文字に着目して係数や次数を考えることがある。この場合, 着目した文字以外の文字は, 数とみなして扱う。

2 多項式

$5x^2 + (-4x) + 2$ のように, 単項式の和として表される式を多項式といい, その1つ1つの単項式を, この多項式の項という。

単項式は項が1つの多項式と考える。多項式のことを整式ともいう。

練習
1

次の単項式の係数と次数をいえ。

(1) $6x^2$

(2) x

(3) $-x^2y^2$

(4) $-3abc$

教 p.8

指針 単項式の係数と次数 単項式では

係数は 数の部分

次数は 掛けた文字の個数

である。掛け算の記号 $\times$ を用いた式に表して考えると, わかりやすい。

解答 (1) 係数は6, 次数は2 答

$\leftarrow 6x^2 = 6 \times x \times x$

(2) 係数は1, 次数は1 答

$\leftarrow x = 1 \times x$

(3) 係数は-1, 次数は4 答

$\leftarrow -x^2y^2 = (-1) \times x \times x \times y \times y$

(4) 係数は-3, 次数は3 答

$\leftarrow -3abc = (-3) \times a \times b \times c$

練習
2

次の単項式で [] 内の文字に着目したとき、その係数と次数をいえ。

- (1)
- $2ax^3$
- [
- x
-] (2)
- $3a^2bc^3$
- [
- a
-] (3)
- $-6ax^2y$
- [
- x
- と
- y
-]

指針 単項式の係数と次数 いずれも文字が2種類以上の単項式であるから、着目する文字以外の文字と数の積が求める係数で、着目する文字の指数が求める次数になる。

- 解答 (1) 係数は $2a$, 次数は 3 答 $\leftarrow 2ax^3 = 2a \times x^3$
 (2) 係数は $3bc^3$, 次数は 2 答 $\leftarrow 3a^2bc^3 = 3bc^3 \times a^2$
 (3) 係数は $-6a$, 次数は 3 答 $\leftarrow -6ax^2y = -6a \times x^2y$

B 多項式の整理

まとめ

1 同類項

多項式 $2x^2 - 5xy + 4 - 3x^2 + 7xy - 4$ …… ① における、 $2x^2$ と $-3x^2$ 、 $-5xy$ と $7xy$ のように、文字の部分が同じである項、および 4 と -4 のように文字を含まない数だけの項を、多項式 ① の同類項という。

2 多項式の次数

同類項をまとめて整理した多項式において、最も次数の高い項の次数をその多項式の次数という。また、次数が n の多項式を n 次式という。

2種類以上の文字を含む多項式でも、特定の文字に着目して係数や次数を同様に考える。たとえば、上の多項式 ① の次数は、 x と y に着目すると2である。

3 定数項

多項式の項の中で、着目した文字を含まない項を定数項という。たとえば、上の多項式 ① を y に着目した場合、定数項は $2x^2 - 3x^2 + 4 - 4$ 、すなわち $-x^2$ であり、 x と y に着目した場合、定数項は $4 - 4$ 、すなわち 0 である（この場合は「定数項はない」と答えてもよい）。

練習
3

次の多項式の同類項をまとめよ。

- (1) $4x^2 + 3x - 1 - 2x^2 - 4x + 6$
 (2) $3a^2 - 2ab - 4b^2 - 5a^2 + 2ab - 8b^2$

指針 多項式の同類項の整理 係数の和を計算して、1つの項にまとめられる。

$$ma + na = (m+n)a, \quad ma - na = (m-n)a$$

- 解答 (1) $4x^2 + 3x - 1 - 2x^2 - 4x + 6$
 $= (4-2)x^2 + (3-4)x + (-1+6)$ $\leftarrow 4x^2$ と $-2x^2$, $3x$ と $-4x$,
 $= 2x^2 - x + 5$ 答 -1 と 6 が同類項

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 3a^2 - 2ab - 4b^2 - 5a^2 + 2ab - 8b^2 \\
 & = (3-5)a^2 + (-2+2)ab + (-4-8)b^2 \\
 & = -2a^2 - 12b^2 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

← $3a^2$ と $-5a^2$, $-2ab$ と $2ab$,
 $-4b^2$ と $-8b^2$ が同類項

練習

4

次の多項式は何次式か。

(1) $x^3 + 4x^2 - 5$

(2) $1 + 6a - 8a^2 - 3a^4$

教 p.9

指針 多項式の次数 同類項がまとめられている多項式であるから、(1)は x の、(2)は a の、それぞれ指数の最大値が求める次数となる。同類項がまとめられていない多項式の次数を考えるときは、同類項をまとめてから指数を調べる。たとえば、 $2x - x^2 + 5 + x^2$ の次数は、同類項をまとめると $2x + 5$ であるから1である(2ではない!)

解答 (1) x^3 …… 3次, $4x^2$ …… 2次, -5 …… 0次

よって 3次式 答

(2) 1 …… 0次, $6a$ …… 1次, $-8a^2$ …… 2次, $-3a^4$ …… 4次

よって 4次式 答

練習

5

多項式 $ax^3 - x^2y + by^2 + c$ は、次の文字に着目すると何次式か。

また、そのときの定数項は何か。

(1) x

(2) y

(3) x と y

教 p.10

指針 多項式の次数と定数項 次数は、(1)、(2)は練習4と同じ方針。(3)では x と y をともに含む項の次数は、 x , y それぞれの指数の合計となる。つまり、 $x^m y^n$ なら、次数は $m+n$ であり、これと(1)、(2)で求めた次数のうちで最大のものが求める次数となる。

定数項は、着目する文字以外の項は、文字の項、数の項すべてが定数項になる。

解答 (1) x に着目すると、 ax^3 の次数が最も高く3次

定数項は x を含まない項であるから $by^2 + c$ よって、 x の3次式、定数項は $by^2 + c$ 答← ax^3 は3次 $-x^2y$ は2次 by^2 は0次 c は0次

(2) y に着目すると、 by^2 の次数が最も高く2次

定数項は y を含まない項であるから $ax^3 + c$ よって、 y の2次式、定数項は $ax^3 + c$ 答← ax^3 は0次 $-x^2y$ は1次 by^2 は2次 c は0次

(3) x と y に着目すると、 ax^3 , $-x^2y$ の次数が最も高く3次

定数項は x も y も含まない項であるから c よって、 x と y の3次式、定数項は c 答← ax^3 は3次 $-x^2y$ は3次 by^2 は2次 c は0次

降べきの順に整理

多項式を, ある文字に着目して次数が低くなる順にまとめることを, 降べきの順に整理するという。

昇べきの順に整理

多項式を, ある文字に着目して次数が高くなる順にまとめることを, 昇べきの順に整理するという。

練習
6

教 p.10

次の多項式を, x について降べきの順に整理せよ。

(1) $4a^2 + ax + 2x - 3a$

(2) $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$

指針 多項式の整理 (降べきの順) x に着目して, 各項を次数が低くなる順に並べる。また, 同じ次数の項は1つにまとめておく。

解答 (1) $4a^2 + ax + 2x - 3a$

← $ax, 2x$ は1次

$$= (a+2)x + (4a^2 - 3a) \quad \text{答}$$

 $4a^2, -3a$ は0次

(2) $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$

← $2x^2$ は2次

$$= 2x^2 + (5y-3)x + (3y^2 - 5y - 2) \quad \text{答}$$

 $5xy, -3x$ は1次 $3y^2, -5y, -2$ は0次

C 多項式の加法と減法

まとめ

多項式の加法

$A+B \cdots A$ と B の項をすべて足して, 同類項をまとめる。

多項式の減法

$A-B \cdots A+(-B)$ と考え, B の各項の符号を変えたものを A に足して, 同類項をまとめる。

練習
7

教 p.11

次の多項式 A, B について, $A+B$ と $A-B$ を計算せよ。

(1) $A=2x^2+3x-1, B=4x^2-5x-6$

(2) $A=-3x^2-2x+4x^3+5, B=2x^3+7-3x^2$

指針 多項式の加法と減法 まず, 多項式 A, B を降べきの順に整理し, かっこをつけて+, -で結び, かっこをはずす。

$$+() \text{ はそのまま } () \text{ をはずす } \quad +(x-y+z)=x-y+z$$

$$-() \text{ は符号を変えて } () \text{ をはずす } \quad -(x-y+z)=-x+y-z$$

そして, 同類項をまとめて, 降べきの順に整理する。

また, 同類項を上下そろえるように並べて書いて計算する方法もある。

解答 (1) $A+B$

$$\begin{aligned}
 &= (2x^2+3x-1) + (4x^2-5x-6) \\
 &= 2x^2+3x-1+4x^2-5x-6 \\
 &= (2+4)x^2 + (3-5)x + (-1-6) \\
 &= 6x^2-2x-7 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 2x^2+3x-1 \\
 +) 4x^2-5x-6 \\
 \hline
 6x^2-2x-7
 \end{array}$$

 $A-B$

$$\begin{aligned}
 &= (2x^2+3x-1) - (4x^2-5x-6) \\
 &= 2x^2+3x-1-4x^2+5x+6 \\
 &= (2-4)x^2 + (3+5)x + (-1+6) \\
 &= -2x^2+8x+5 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 2x^2+3x-1 \\
 -) 4x^2-5x-6 \\
 \hline
 -2x^2+8x+5
 \end{array}$$

(2) まず, A, B を降べきの順に整理すると

$$A = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 5$$

$$B = 2x^3 - 3x^2 + 7$$

 $A+B$

$$\begin{aligned}
 &= (4x^3-3x^2-2x+5) + (2x^3-3x^2+7) \\
 &= 4x^3-3x^2-2x+5+2x^3-3x^2+7 \\
 &= (4+2)x^3 + (-3-3)x^2 - 2x + (5+7) \\
 &= 6x^3-6x^2-2x+12 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 4x^3-3x^2-2x+5 \\
 +) 2x^3-3x^2+7 \\
 \hline
 6x^3-6x^2-2x+12
 \end{array}$$

 $A-B$

$$\begin{aligned}
 &= (4x^3-3x^2-2x+5) - (2x^3-3x^2+7) \\
 &= 4x^3-3x^2-2x+5-2x^3+3x^2-7 \\
 &= (4-2)x^3 + (-3+3)x^2 - 2x + (5-7) \\
 &= 2x^3-2x-2 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 4x^3-3x^2-2x+5 \\
 -) 2x^3-3x^2+7 \\
 \hline
 2x^3-2x-2
 \end{array}$$

練習
8

教 p.11

 $A = x^2 + 4x - 3$, $B = 2x^2 - x + 4$ とする。次の式を計算せよ。

(1) $A+2B$

(2) $2A-3B$

(3) $A+B+2(A-B)$

指針 多項式の計算 多項式 A, B にかっこをつけて代入する。多項式の係数は、次の分配法則を用いて多項式のすべての項に掛ける。

$$m(a+b+c) = ma + mb + mc$$

(3) は, まず A と B の式を計算し, 簡単にしてから代入する。解答 (1) $A+2B = (x^2+4x-3) + 2(2x^2-x+4)$

$$= x^2+4x-3+4x^2-2x+8$$

$$= (1+4)x^2 + (4-2)x + (-3+8)$$

$$= 5x^2+2x+5 \quad \text{答}$$

(2) $2A-3B = 2(x^2+4x-3) - 3(2x^2-x+4)$

$$\begin{aligned}
 &= 2x^2 + 8x - 6 - 6x^2 + 3x - 12 \\
 &= (2-6)x^2 + (8+3)x + (-6-12) \\
 &= -4x^2 + 11x - 18 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad A+B+2(A-B)=A+B+2A-2B=3A-B$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \quad 3A-B &= 3(x^2+4x-3)-(2x^2-x+4) \\
 &= 3x^2+12x-9-2x^2+x-4 \\
 &= (3-2)x^2+(12+1)x+(-9-4) \\
 &= x^2+13x-13 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

2 多項式の乗法

A 単項式の乗法

まとめ

1 累乗

a を n 個掛けたものを「 a の n 乗」といい、 a^n と書く。 a^n における n を、 a^n の指数しすうという。また、 a , a^2 , a^3 , …… をまとめて a の累乗るいじょうという。

注意 a^1 は指数 1 を省いて a と書く。

2 指数法則

m, n は正の整数とする。

$$1 \quad a^m \times a^n = a^{m+n} \quad 2 \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad 3 \quad (ab)^n = a^n b^n$$

練習 9

次の式を計算せよ。

$$(1) \quad 2a^3 \times 4a^2 \quad (2) \quad 3x^2y \times (-2x^3y^2) \quad (3) \quad (-3x^2y)^3$$

教 p.12

指針 単項式の乗法 (単項式) $\times$ (単項式) は、各単項式の係数は係数どうしの積、文字は文字どうしの積を別々に計算する。

文字どうしの積の計算には、指数法則を利用する。

$$\begin{aligned}
 \text{解答} \quad (1) \quad 2a^3 \times 4a^2 &= (2 \times 4) \times (a^3 \times a^2) &< a^m \times a^n = a^{m+n} \\
 &= 8a^{3+2} \\
 &= 8a^5 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 3x^2y \times (-2x^3y^2) &= \{3 \times (-2)\} \times (x^2 \times x^3) \times (y \times y^2) \\
 &= -6x^{2+3}y^{1+2} \\
 &= -6x^5y^3 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (-3x^2y)^3 &= (-3)^3 \times (x^2)^3 \times y^3 \\
 &= -27x^{2 \times 3}y^3 \\
 &= -27x^6y^3 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

B 多項式の乗法

まとめ

1 分配法則

多項式の積は、次の分配法則を用いて計算する。

$$A(B+C)=AB+AC \quad (A+B)C=AC+BC$$

2 多項式の積の展開

多項式の積の形をした式について、その積を計算して1つの多項式に表すことを、もとの式を展開するという。

練習
10

次の式を展開せよ。

(1) $4x^2(2x^2-3x+5)$

(2) $(2x-1)(4x^2+3)$

(3) $(2x^2+x-3)(x-2)$

(4) $(2x^2+3)(x^2-4x-1)$

指針 多項式の乗法 (多項式) $\times$ (多項式)は、分配法則を繰り返し用いて計算する。
たとえば $(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$

なお、教科書 p.13 例10のような縦書きの方法もある。

解答 (1) $4x^2(2x^2-3x+5)=4x^2 \cdot 2x^2 + 4x^2 \cdot (-3x) + 4x^2 \cdot 5$
 $=8x^4 - 12x^3 + 20x^2$ 答

(2) $(2x-1)(4x^2+3)$
 $= (2x-1) \cdot 4x^2 + (2x-1) \cdot 3$
 $= 2x \cdot 4x^2 + (-1) \cdot 4x^2 + 2x \cdot 3 + (-1) \cdot 3$
 $= 8x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ 答

$$\begin{array}{r} 4x^2 \quad +3 \\ \times) \quad 2x - 1 \\ \hline 8x^3 \quad + 6x \\ -4x^2 \quad -3 \\ \hline 8x^3 - 4x^2 + 6x - 3 \end{array}$$

(3) $(2x^2+x-3)(x-2)$
 $= (2x^2+x-3)x + (2x^2+x-3) \cdot (-2)$
 $= 2x^3 + x^2 - 3x - 4x^2 - 2x + 6$
 $= 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$ 答

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 3 \\ \times) \quad x - 2 \\ \hline 2x^3 + x^2 - 3x \\ -4x^2 - 2x + 6 \\ \hline 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

(4) $(2x^2+3)(x^2-4x-1)$
 $= (2x^2+3)x^2 + (2x^2+3) \cdot (-4x) + (2x^2+3) \cdot (-1)$
 $= 2x^4 + 3x^2 - 8x^3 - 12x - 2x^2 - 3$
 $= 2x^4 - 8x^3 + x^2 - 12x - 3$ 答

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad +3 \\ \times) \quad x^2 - 4x - 1 \\ \hline 2x^4 \quad + 3x^2 \\ -8x^3 \quad -12x \\ -2x^2 \quad -3 \\ \hline 2x^4 - 8x^3 + x^2 - 12x - 3 \end{array}$$

練習
11次の式を展開し、 x について降べきの順に整理せよ。

(1) $(x^2+ax-1)(x+a)$

(2) $(ax+b)(cx+d)$

指針 多項式の乗法 x について整理するから、 x 以外の文字は数と同様に扱う。

教 p.13

解答 (1) $(x^2+ax-1)(x+a) = (x^2+ax-1)x + (x^2+ax-1)a$
 $= x^3+ax^2-x+ax^2+a^2x-a$
 $= x^3+(a+a)x^2+(-1+a^2)x-a$
 $= x^3+2ax^2+(a^2-1)x-a$ 答

(2) $(ax+b)(cx+d) = (ax+b)cx + (ax+b)d$
 $= acx^2+bcx+adx+bd$
 $= acx^2+(ad+bc)x+bd$ 答

C 展開の公式

まとめ

展開の公式

- 1 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ [和の平方]
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ [差の平方]
 2 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ [和と差の積]
 3 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
 4 $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

練習
12

教 p.14

次の式を展開せよ。

- (1) $(2x+5)^2$ (2) $(3x-2y)^2$ (3) $(5x+4y)(5x-4y)$
 (4) $(x+1)(x+5)$ (5) $(x-3)(x+8)$ (6) $(x-y)(x-4y)$

指針 展開の公式による式の展開 多項式の積は、分配法則によって必ず展開できるが、展開の公式を利用すると簡単にできる場合が多い。

(1), (2) 展開の公式 1, (3) 公式 2, (4)~(6) 公式 3 を利用する。

解答 (1) $(2x+5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2$
 $= 4x^2 + 20x + 25$ 答

(2) $(3x-2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2$
 $= 9x^2 - 12xy + 4y^2$ 答

(3) $(5x+4y)(5x-4y) = (5x)^2 - (4y)^2$
 $= 25x^2 - 16y^2$ 答

(4) $(x+1)(x+5) = x^2 + (1+5)x + 1 \cdot 5$
 $= x^2 + 6x + 5$ 答

(5) $(x-3)(x+8) = x^2 + \{(-3)+8\}x + (-3) \cdot 8$
 $= x^2 + 5x - 24$ 答

(6) $(x-y)(x-4y) = x^2 + \{(-y)+(-4y)\}x + (-y) \cdot (-4y)$
 $= x^2 - 5xy + 4y^2$ 答

練習
13

次の式を展開せよ。

(1) $(2x+1)(4x+5)$

(2) $(x+4)(2x-3)$

(3) $(3x-7)(x+2)$

(4) $(2x-5)(2x-1)$

(5) $(x+3y)(2x-y)$

(6) $(3x-2a)(4x-3a)$

指針 展開の公式による式の展開 次の展開の公式4を利用する。

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

解答 (1) $(2x+1)(4x+5)=2 \cdot 4x^2+(2 \cdot 5+1 \cdot 4)x+1 \cdot 5$
 $=8x^2+14x+5$ 答

(2) $(x+4)(2x-3)=1 \cdot 2x^2+\{1 \cdot (-3)+4 \cdot 2\}x+4 \cdot (-3)$
 $=2x^2+5x-12$ 答

(3) $(3x-7)(x+2)=3 \cdot 1x^2+\{3 \cdot 2+(-7) \cdot 1\}x+(-7) \cdot 2$
 $=3x^2-x-14$ 答

(4) $(2x-5)(2x-1)=2 \cdot 2x^2+\{2 \cdot (-1)+(-5) \cdot 2\}x+(-5) \cdot (-1)$
 $=4x^2-12x+5$ 答

(5) $(x+3y)(2x-y)=1 \cdot 2x^2+\{1 \cdot (-1)+3 \cdot 2\}xy+3 \cdot (-1)y^2$
 $=2x^2+5xy-3y^2$ 答

(6) $(3x-2a)(4x-3a)=3 \cdot 4x^2+\{3 \cdot (-3)+(-2) \cdot 4\}ax+(-2) \cdot (-3)a^2$
 $=12x^2-17ax+6a^2$ 答

D 式の展開の工夫

まとめ

式の展開の工夫

複雑な式を展開する場合、式の一部を1つのまとまりとみて

1 おき換え 2 組み合わせと掛ける順序

など適当な工夫をすると、展開の公式を利用できることがある。

練習
14

次の式を展開せよ。

(1) $(a+b-c)^2$

(2) $(x+2y+3z)^2$

指針 式の展開の工夫 項が3つある式の2乗であるから、おき換えによって展開の公式1を利用する。

解答 (1) $(a+b-c)^2=\{(a+b)-c\}^2$
 $=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$
 $=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (x+2y+3z)^2 &= \{(x+2y)+3z\}^2 \\ &= (x+2y)^2 + 2(x+2y) \cdot 3z + (3z)^2 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 6xz + 12yz + 9z^2 \\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6zx \quad \text{答} \end{aligned}$$

練習
15

次の式を展開せよ。

$$\begin{array}{ll} (1) \quad (x^2+3x+2)(x^2-3x+2) & (2) \quad (x-y-z)(x-y+z) \\ (3) \quad (x+1)^2(x-1)^2 & (4) \quad (x^2+1)(x+1)(x-1) \end{array}$$

教 p.15

指針 式の展開の工夫

- (1) $x^2+2=A$, (2) では $x-y=A$ とおくと、展開の公式 2 が利用できる。
 (3) $x+1=A$, $x-1=B$ とおくと $(x+1)^2(x-1)^2=A^2B^2=(AB)^2$
 (4) 和と差の積である後ろ 2 つ $(x+1)(x-1)$ を組み合わせて、先に計算してしまおうと、さらに展開の公式 2 が利用できる。

解答

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x^2+3x+2)(x^2-3x+2) && \leftarrow x^2+2=A \text{ とおくと} \\ & = \{(x^2+2)+3x\}\{(x^2+2)-3x\} && (A+3x)(A-3x) \\ & = (x^2+2)^2 - (3x)^2 && \text{の展開になる。} \\ & = x^4 + 4x^2 + 4 - 9x^2 \\ & = x^4 - 5x^2 + 4 \quad \text{答} \\ (2) \quad & (x-y-z)(x-y+z) && \leftarrow x-y=A \text{ とおくと} \\ & = \{(x-y)-z\}\{(x-y)+z\} && (A-z)(A+z) \\ & = (x-y)^2 - z^2 && \text{の展開になる。} \\ & = x^2 - 2xy + y^2 - z^2 \quad \text{答} \\ (3) \quad & (x+1)^2(x-1)^2 && \\ & = \{(x+1)(x-1)\}^2 && \\ & = (x^2-1)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 && \leftarrow \text{掛ける順序を変え} \\ & = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \text{答} && \text{れば、展開の公式} \\ & && \text{2 が使える。} \\ (4) \quad & (x^2+1)(x+1)(x-1) && \\ & = (x^2+1)\{(x+1)(x-1)\} && \leftarrow \text{和と差の積である} \\ & = (x^2+1)(x^2-1) && \text{後ろ 2 つを組み合} \\ & = (x^2)^2 - 1 && \text{わせる。} \\ & = x^4 - 1 \quad \text{答} \end{aligned}$$

3 因数分解

A 共通因数による因数分解

まとめ

1 因数分解

1つの多項式を1次以上の多項式の積の形に表すことを、もとの式を因数分解するといい、積を作っている各式をもとの式の因数という。

2 共通因数による因数分解

$$AB+AC=A(B+C)$$

練習
16

次の式を因数分解せよ。

(1) $12x^3-8x^2y$

(2) $3a^2x+6ax^2+ax$

教 p.16

指針 因数分解 (共通因数をくくり出す) 多項式の各項に共通な因数をみつけ、その共通因数をかつこの外にくくり出す。

解答 (1) $12x^3-8x^2y=4x^2 \cdot 3x-4x^2 \cdot 2y$

← $4x^2$ が共通因数

$$=4x^2(3x-2y) \quad \text{答}$$

(2) $3a^2x+6ax^2+ax=ax \cdot 3a+ax \cdot 6x+ax \cdot 1$

← ax が共通因数

$$=ax(3a+6x+1) \quad \text{答}$$

練習
17

次の式を因数分解せよ。

(1) $(a+b)c+d(a+b)$

(2) $(x-2y)a+(2y-x)b$

教 p.16

指針 因数分解 (共通因数をくくり出す)

(1) 共通因数 $a+b$ をくくり出す。

(2) $2y-x=-(x-2y)$ であるから、 $x-2y$ が共通因数である。

解答 (1) $(a+b)c+d(a+b)=(a+b)(c+d) \quad \text{答}$

(2) $(x-2y)a+(2y-x)b=(x-2y)a-(x-2y)b$

$$=(x-2y)(a-b) \quad \text{答}$$



B 2次式の因数分解

まとめ

1章
数と式

因数分解の公式

1 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

2 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

3 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

教 p.17

練習
18

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+10x+25$

(2) $x^2-12x+36$

(3) $x^2+6xy+9y^2$

(4) $4a^2-4ab+b^2$

(5) x^2-9y^2

(6) $16a^2-25b^2$

指針 2次式の因数分解 因数分解では、まず、共通因数があるかどうかを調べ、あればそれをくくり出す。

次に、因数分解の公式が利用できるかを考える。

(1)~(4)は因数分解の公式1, (5), (6)は公式2を利用する。

解答 (1) $x^2+10x+25=x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2=(x+5)^2$ 答

(2) $x^2-12x+36=x^2-2\cdot x\cdot 6+6^2=(x-6)^2$ 答

(3) $x^2+6xy+9y^2=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2=(x+3y)^2$ 答

(4) $4a^2-4ab+b^2=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot b+b^2=(2a-b)^2$ 答

(5) $x^2-9y^2=x^2-(3y)^2=(x+3y)(x-3y)$ 答

(6) $16a^2-25b^2=(4a)^2-(5b)^2=(4a+5b)(4a-5b)$ 答

教 p.17

練習
19

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+8x+12$

(2) $x^2-13x+36$

(3) a^2+a-20

(4) $x^2+5xy+6y^2$

(5) $a^2-8ab+15b^2$

(6) $x^2-ax-12a^2$

指針 2次式の因数分解 x の2次式 x^2+px+q について、積が q 、和が p となる2数をみつけ、因数分解の公式3を利用する。

解答 (1) $x^2+8x+12=x^2+(2+6)x+2\cdot 6$
 $=(x+2)(x+6)$ 答

← 積が12, 和が8
 → 2と6

(2) $x^2-13x+36=x^2+(-4-9)x+(-4)\cdot(-9)$
 $=(x-4)(x-9)$ 答

← 積が36, 和が-13
 → -4と-9

$$(3) \quad a^2 + a - 20 = a^2 + (-4+5)a + (-4) \cdot 5 \\ = (a-4)(a+5) \quad \text{答}$$

← 積が -20 , 和が 1
→ -4 と 5

$$(4) \quad x^2 + 5xy + 6y^2 = x^2 + (2y+3y)x + 2y \cdot 3y \\ = (x+2y)(x+3y) \quad \text{答}$$

← 積が $6y^2$, 和が $5y$
→ $2y$ と $3y$

$$(5) \quad a^2 - 8ab + 15b^2 \\ = a^2 + (-3b-5b)a + (-3b) \cdot (-5b) \\ = (a-3b)(a-5b) \quad \text{答}$$

← 積が $15b^2$, 和が $-8b$
→ $-3b$ と $-5b$

$$(6) \quad x^2 - ax - 12a^2 \\ = x^2 + (3a-4a)x + 3a \cdot (-4a) \\ = (x+3a)(x-4a) \quad \text{答}$$

← 積が $-12a^2$, 和が $-a$
→ $3a$ と $-4a$

まとめ

因数分解の公式

$$4 \quad acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$$

解説 px^2+qx+r が $(ax+b)(cx+d)$ の形に因数分解されたとすると
 $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

であるから $p=ac$, $q=ad+bc$, $r=bd$

したがって a, c は p の約数

b, d は r の約数

さらに、右のように、たすきに掛けた bc , ad の和が q になるから、この図式を使って適する組を見つける。

右上のような図式をたすき掛けという。

$$\begin{array}{ccc} a & \times & b \rightarrow bc \\ c & \times & d \rightarrow ad \\ \hline ac & bd & ad+bc \end{array}$$

教 p.18

深める

$3x^2+14x+8$ を因数分解するとき、公式4を使って $ac=3$,

$ad+bc=14$, $bd=8$ となる a, b, c, d をみつけられればよい。

いま、 $a=1$, $c=3$ とした場合、 b, d の候補として、 -1 と -8 , -2 と -4 はたすき掛けの計算をしなくても適さないことがわかる。その理由を説明してみよう。

指針 $a=1$, $c=3$ はともに正の数であり、 b, d の候補の -1 と -8 , -2 と -4 は、ともに負の数どうしである。このとき、 $ad+bc$ の符号がどうなるかを考えてみる。

(正)×(負)=(負), (負)+(負)=(負) に着目。

解答 $a=1$, $c=3$ のとき、 b, d が -1 と -8 , -2 と -4 のようにともに負の場合、 a, c がともに正の数であるから ad も bc も負の数となる。

よって、 $ad+bc$ も負の数になる。

しかし、 $ad+bc=14$ は正の数であるから、 b, d の候補として、 -1 と -8 、 -2 と -4 は適さない。 終

教 p.19

練習
20

次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2+7x+2$

(2) $2x^2+9x+10$

(3) $2x^2-13x+6$

(4) $4y^2+5y-21$

(5) $3x^2+5xy-2y^2$

(6) $6x^2-7ax-3a^2$

指針 2 次式の因数分解 (たすき掛け) x の 2 次式 px^2+qx+r について、因数分解の公式 4 を利用する。たすき掛けを利用するとよい。

(5), (6) のように、文字が 2 種類含まれている場合も同様に考える。

解答 (1) $3x^2+7x+2$

$$=(x+2)(3x+1)$$

答

$$\begin{array}{r} \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \rightarrow 6 \\ 3 \quad 1 \rightarrow 1 \\ \hline 3 \quad 2 \quad 7 \end{array}$$

(2) $2x^2+9x+10$

$$=(x+2)(2x+5)$$

答

$$\begin{array}{r} \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \rightarrow 4 \\ 2 \quad 5 \rightarrow 5 \\ \hline 2 \quad 10 \quad 9 \end{array}$$

(3) $2x^2-13x+6$

$$=(x-6)(2x-1)$$

答

$$\begin{array}{r} \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad -6 \rightarrow -12 \\ 2 \quad -1 \rightarrow -1 \\ \hline 2 \quad 6 \quad -13 \end{array}$$

(4) $4y^2+5y-21$

$$=(y+3)(4y-7)$$

答

$$\begin{array}{r} \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 3 \rightarrow 12 \\ 4 \quad -7 \rightarrow -7 \\ \hline 4 \quad -21 \quad 5 \end{array}$$

(5) $3x^2+5xy-2y^2$

$$=(x+2y)(3x-y)$$

答

$$\begin{array}{r} \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2y \rightarrow 6y \\ 3 \quad -y \rightarrow -y \\ \hline 3 \quad -2y^2 \quad 5y \end{array}$$

(6) $6x^2-7ax-3a^2$

$$=(2x-3a)(3x+a)$$

答

$$\begin{array}{r} \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad -3a \rightarrow -9a \\ 3 \quad a \rightarrow 2a \\ \hline 6 \quad -3a^2 \quad -7a \end{array}$$

C 因数分解の工夫

まとめ

因数分解の工夫

複雑な式を因数分解する場合、式の一部を 1 つのまとまりとみるなど、式の形の特徴に着目して

- 1 項をうまく組み合わせる。
- 2 おき換えをする。
- 3 文字の多い式では、次数の最も低い文字について整理する。
- 4 x と y の 2 次式の場合、 x または y について、降べきの順に整理する。

など適当な工夫をすると、因数分解の公式を利用できることがある。

練習
21

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x-y)^2-5(x-y)+6$

(2) $2(x+3y)^2-(x+3y)-1$

(3) $(x+y)^2-9$

(4) $x^2-(y-1)^2$

(5) x^4-8x^2-9

(6) x^4-16

指針 おき換えによる因数分解 (1)~(4) は、展開せずに、かつこの中の式を A とおくと、 A についての 2 次式ができるから、この式を因数分解する。(5), (6) は、 $x^4=(x^2)^2$ であるから、 $x^2=A$ とおくと、 A についての 2 次式ができる。 A を x^2 にもどした後、さらに因数分解できる場合があるから注意する。

解答 (1) $x-y=A$ とおく。

$$(x-y)^2-5(x-y)+6$$

$$=A^2-5A+6$$

$$=(A-2)(A-3)$$

$$=\{(x-y)-2\}\{(x-y)-3\}$$

$$=(x-y-2)(x-y-3) \quad \text{答}$$

← 積が 6、和が -5
→ -2 と -3

← A を $x-y$ にもどす。

(2) $x+3y=A$ とおく。

$$2(x+3y)^2-(x+3y)-1$$

$$=2A^2-A-1$$

$$=(A-1)(2A+1)$$

$$=\{(x+3y)-1\}\{2(x+3y)+1\}$$

$$=(x+3y-1)(2x+6y+1) \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccc} 1 & \times & -1 \rightarrow -2 \\ 2 & & 1 \rightarrow 1 \\ \hline & -1 & -1 \end{array} \end{array}$$

← A を $x+3y$ にもどす。

(3) $x+y=A$ とおく。

$$(x+y)^2-9=A^2-9=(A+3)(A-3)$$

$$=(x+y+3)(x+y-3) \quad \text{答}$$

← A を $x+y$ にもどす。

(4) $y-1=A$ とおく。

$$x^2-(y-1)^2=x^2-A^2=(x+A)(x-A)$$

$$=\{x+(y-1)\}\{x-(y-1)\}$$

$$=(x+y-1)(x-y+1) \quad \text{答}$$

← A を $y-1$ にもどす。

(5) $x^2=A$ とおく。

$$x^4-8x^2-9=A^2-8A-9=(A+1)(A-9)$$

$$=(x^2+1)(x^2-9)$$

$$=(x^2+1)(x+3)(x-3) \quad \text{答}$$

(6) $x^2=A$ とおく。

$$x^4-16=A^2-16=(A+4)(A-4)$$

$$=(x^2+4)(x^2-4)$$

← A を x^2 にもどす。

$$=(x^2+4)(x+2)(x-2) \quad \text{答}$$

練習
22

教 p.20

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+xy-4x-y+3$

(2) $x^2+ax-3a-9$

指針 1つの文字について整理する因数分解 文字が2つ以上含まれていて、直接公式を用いることができないときは、次数の低い方の文字について整理する。

解答 (1) $x^2+xy-4x-y+3$

$$=(x-1)y+(x^2-4x+3)$$

← 次数の低い方の文字 y について式を整理する。

$$=(x-1)y+(x-1)(x-3)$$

← $(x-1)$ が共通因数。

$$=(x-1)\{y+(x-3)\}$$

$$=(x-1)(x+y-3) \quad \text{答}$$

(2) $x^2+ax-3a-9$

$$=(x-3)a+(x^2-9)$$

← 次数の低い方の文字 a について式を整理する。

$$=(x-3)a+(x+3)(x-3)$$

← $(x-3)$ が共通因数。

$$=(x-3)\{a+(x+3)\}$$

$$=(x-3)(x+a+3) \quad \text{答}$$

練習
23

教 p.20

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+3xy+2y^2-2x-3y+1$

(2) $3x^2-5ax+2a^2-3x+a-6$

指針 式を整理する因数分解 (1) x の2次式とみて降べきの順に

$$x^2+(y \text{ の } 1 \text{ 次式})x+(y \text{ の } 2 \text{ 次式})$$

の形に整理すると、因数分解の公式3または4が利用できる。(2)も同様。

解答 (1) $x^2+3xy+2y^2-2x-3y+1$

$$=x^2+(3y-2)x+(2y^2-3y+1)$$

$$=x^2+(3y-2)x+(y-1)(2y-1)$$

$$=\{x+(y-1)\}\{x+(2y-1)\}$$

$$=(x+y-1)(x+2y-1) \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & y-1 \rightarrow y-1 \\ 1 & \times & 2y-1 \rightarrow 2y-1 \\ \hline & & 3y-2 \end{array}$$

(2) $3x^2-5ax+2a^2-3x+a-6$

$$=3x^2-(5a+3)x+(2a^2+a-6)$$

$$=3x^2-(5a+3)x+(a+2)(2a-3)$$

$$=\{x-(a+2)\}\{3x-(2a-3)\}$$

$$=(x-a-2)(3x-2a+3) \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & -(a+2) \rightarrow -3(a+2) \\ 3 & \times & -(2a-3) \rightarrow -(2a-3) \\ \hline & & -(5a+3) \end{array}$$

練習
24

教 p.21

次の式を因数分解せよ。

$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$$

指針 1つの文字について整理する因数分解 どの文字についても2次式であるから、たとえば a について降べきの順に整理する。

$$\begin{aligned} \text{解答 } & ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) \\ &= (b-c)a^2 + (-b^2 + c^2)a + (b^2c - bc^2) \\ &= (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a) \quad \text{答} \end{aligned}$$

← $(b-c)$ が
共通因数

コラム x, y の2次式の因数分解

練習

教 p.21

$2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$ を y について整理して因数分解しても、 x について整理して因数分解した結果 $(x+y-2)(2x+3y+1)$ と同じになることを確かめよう。

また、 $6x^2 + 5xy + y^2 - x - 1$ を、 x, y それぞれについて整理して因数分解し、どのような違いがあるか考えを述べてみよう。

解答 (前半) $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$

$$\begin{aligned} &= 3y^2 + (5x-5)y + (2x^2 - 3x - 2) \\ &= 3y^2 + (5x-5)y + (x-2)(2x+1) \\ &= \{y + (x-2)\}\{3y + (2x+1)\} \\ &= (x+y-2)(2x+3y+1) \end{aligned}$$

$$\leftarrow \begin{array}{ccc} 1 & \times & x-2 \rightarrow 3x-6 \\ 3 & \times & 2x+1 \rightarrow 2x+1 \\ \hline & & 5x-5 \end{array}$$

よって、 x について整理して因数分解した結果と同じになる。 終

(後半) $6x^2 + 5xy + y^2 - x - 1$ を x について整理して因数分解すると

$$\begin{aligned} 6x^2 + (5y-1)x + (y^2-1) &= 6x^2 + (5y-1)x + (y+1)(y-1) \\ &= (2x+y-1)(3x+y+1) \quad \cdots \cdots \text{①} \end{aligned}$$

$6x^2 + 5xy + y^2 - x - 1$ を y について整理して因数分解すると

$$\begin{aligned} y^2 + 5xy + (6x^2 - x - 1) &= y^2 + 5xy + (2x-1)(3x+1) \\ &= (y+2x-1)(y+3x+1) \quad \cdots \cdots \text{②} \end{aligned}$$

②は $(2x+y-1)(3x+y+1)$ と変形できるから、①と②は同じで、 x について整理しても y について整理しても因数分解の結果は同じであるが、

次のような違いがある。

x について整理した場合は、定数項にあたる多項式の因数分解は簡単だが、 x^2 の係数が 6 であるから、その後のたすき掛けの計算では $6=1 \times 6$ と $6=2 \times 3$ の場合を考えなくてはならないので、少し複雑である。

y について整理した場合は、定数項にあたる多項式の因数分解が少し複雑だが、 y^2 の係数が 1 であるから、その後の因数分解は、たすき掛けで考える必要はなく簡単である。 

発展 3 次式の展開と因数分解

まとめ

展開の公式

$$5 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

[和の式の立方]

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

[差の式の立方]

$$6 \quad (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

練習 1

次の式を展開せよ。

$$(1) \quad (x+2)^3$$

$$(2) \quad (x-1)^3$$

$$(3) \quad (3a+b)^3$$

$$(4) \quad (2x-3y)^3$$

教 p.22

指針 3 次式の展開 1 次式の立方、すなわち和の式の 3 乗、差の式の 3 乗の形であるから、展開の公式 5 を用いて展開する。

解答 (1) $(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \quad \text{答}$$

$$(2) \quad (x-1)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad \text{答}$$

$$(3) \quad (3a+b)^3 = (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot b + 3 \cdot 3a \cdot b^2 + b^3$$

$$= 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3 \quad \text{答}$$

$$(4) \quad (2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3$$

$$= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 \quad \text{答}$$

練習
2

次の展開の公式6が成り立つことを、左辺を展開して確かめよ。

$$\mathbf{6} \quad (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \quad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

指針 分配法則 $(a+b)C=aC+bC$, $(a-b)C=aC-bC$ を利用する。

解答 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$
 $=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$
 $=a^3+b^3$ 終

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$$

$$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$

$$=a^3-b^3$$
 終

別解 (後半) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ において、 b を $-b$ におき換えると

$$\{a+(-b)\}\{a^2-a(-b)+(-b)^2\}=a^3+(-b)^3$$

すなわち $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ 終

練習
3

次の式を展開せよ。

$$(1) \quad (x+2)(x^2-2x+4)$$

$$(2) \quad (x-3)(x^2+3x+9)$$

$$(3) \quad (x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$$

$$(4) \quad (2x-3a)(4x^2+6ax+9a^2)$$

指針 3次式の展開 次の展開の公式6が利用できるか判断する。

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{2乗} \quad \text{2乗} \\ \nearrow \quad \searrow \\ (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \text{異符号} \quad \text{プラス} \end{array} & \begin{array}{c} \text{2乗} \quad \text{2乗} \\ \nearrow \quad \searrow \\ (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \text{異符号} \quad \text{プラス} \end{array} \end{array}$$

解答 (1) $(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x \cdot 2+2^2)$

$$=x^3+2^3=x^3+8$$
 答

(2) $(x-3)(x^2+3x+9)=(x-3)(x^2+x \cdot 3+3^2)$

$$=x^3-3^3=x^3-27$$
 答

(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)=(x+3y)\{x^2-x \cdot 3y+(3y)^2\}$

$$=x^3+(3y)^3=x^3+27y^3$$
 答

(4) $(2x-3a)(4x^2+6ax+9a^2)=(2x-3a)\{(2x)^2+2x \cdot 3a+(3a)^2\}$

$$=(2x)^3-(3a)^3=8x^3-27a^3$$
 答

因数分解の公式

$$5 \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

[立方の和]

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

[立方の差]

練習
4

教 p.23

次の式を因数分解せよ。

$$(1) \ x^3 - 1 \quad (2) \ x^3 + 27a^3 \quad (3) \ x^3 - 64 \quad (4) \ 125x^3 - 8y^3$$

指針 3次式の因数分解 立方の和, 差, すなわち3乗の和, 3乗の差の形であるから, 因数分解の公式5を用いて因数分解する。

$$\text{解答} \quad (1) \ x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x \cdot 1 + 1^2)$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1) \quad \text{答}$$

$$(2) \ x^3 + 27a^3 = x^3 + (3a)^3 = (x + 3a)\{x^2 - x \cdot 3a + (3a)^2\}$$

$$= (x + 3a)(x^2 - 3ax + 9a^2) \quad \text{答}$$

$$(3) \ x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + x \cdot 4 + 4^2)$$

$$= (x - 4)(x^2 + 4x + 16) \quad \text{答}$$

$$(4) \ 125x^3 - 8y^3 = (5x)^3 - (2y)^3 = (5x - 2y)\{(5x)^2 + 5x \cdot 2y + (2y)^2\}$$

$$= (5x - 2y)(25x^2 + 10xy + 4y^2) \quad \text{答}$$



第1章 第1節

問題

教 p.24

1 次の式を計算せよ。

(1) $(6x^3-3x-4)+(5+8x^2+2x-x^3)+2(x-4x^2-3)$

(2) $(7x^3-4x-5)+x(3x+6-2x^2)-3x(2x^2-x+4)$

指針 多項式の計算 かっこをはずして同類項をまとめ、降べきの順に整理する。

$+()$ はそのまま、 $-()$ は符号を変えてかっこをはずす。また、かっこの前に係数があるときは、分配法則を用いてすべての項に掛ける。

解答 (1) $(6x^3-3x-4)+(5+8x^2+2x-x^3)+2(x-4x^2-3)$

$$=6x^3-3x-4+5+8x^2+2x-x^3+2x-8x^2-6$$

$$=(6-1)x^3+(8-8)x^2+(-3+2+2)x+(-4+5-6)$$

$$=5x^3+x-5 \quad \text{答}$$

(2) $(7x^3-4x-5)+x(3x+6-2x^2)-3x(2x^2-x+4)$

$$=7x^3-4x-5+3x^2+6x-2x^3-6x^3+3x^2-12x$$

$$=(7-2-6)x^3+(3+3)x^2+(-4+6-12)x-5$$

$$=-x^3+6x^2-10x-5 \quad \text{答}$$

教 p.24

2 次の式を展開せよ。

(1) $(2m+5)(m-2)$

(2) $(6a-5b)(6a+5b)$

(3) $(3-2x)(1+x)$

(4) $(x-a+1)^2$

(5) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(6) $(x+y-z)(x-y+z)$

(7) $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

(8) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

(9) $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)$

指針 多項式の乗法 展開の公式を利用する。

解答 (1) $(2m+5)(m-2)=2m^2+\{2\cdot(-2)+5\cdot1\}m+5\cdot(-2)$

$$=2m^2+m-10 \quad \text{答}$$

(2) $(6a-5b)(6a+5b)=(6a)^2-(5b)^2=36a^2-25b^2 \quad \text{答}$

(3) $(3-2x)(1+x)=3\cdot1+\{3\cdot1+(-2)\cdot1\}x+(-2)\cdot1\cdot x^2$

$$=3+x-2x^2=-2x^2+x+3 \quad \text{答} \quad \leftarrow \text{降べきの順に整理した。}$$

(4) $(x-a+1)^2=\{(x-a)+1\}^2$

 $\leftarrow x-a=A$ とおくと

$$=(x-a)^2+2(x-a)+1^2$$

 $(A+1)^2$ の展開になる。

$$=x^2-2ax+a^2+2x-2a+1 \quad \text{答}$$

- (5) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
 $=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}$
 $=(x^2+2)^2-(2x)^2$
 $=x^4+4x^2+4-4x^2=x^4+4$ 答
 $\leftarrow x^2+2=A$ とおくと
 $(A+2x)(A-2x)$
 の展開になる。
- (6) $(x+y-z)(x-y+z)$
 $=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$
 $=x^2-(y-z)^2=x^2-(y^2-2yz+z^2)$
 $=x^2-y^2+2yz-z^2$ 答
 $\leftarrow y-z=A$ とおくと
 $(x+A)(x-A)$
 の展開になる。
- (7) $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)=(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$
 $=(x^4+1)(x^4-1)=x^8-1$ 答
- (8) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
 $=(x^2-1)(x^2-4)$
 $=(x^2)^2+(-1-4)x^2+(-1)\cdot(-4)$
 $=x^4-5x^2+4$ 答
 $\leftarrow x^2=A$ とおくと
 $(A-1)(A-4)$
 の展開になる。
- (9) $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)=(x+4)(x-3)\times(x+2)(x-1)$
 $=(x^2+x-12)(x^2+x-2)=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
 $=x^4+2x^3+x^2-14x^2-14x+24$
 $=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$ 答

教 p.24

3 次の式を因数分解せよ。

- (1) $2ax^2-8a$ (2) $ax^2+by^2-ay^2-bx^2$
 (3) $(x-4)(3x+1)+10$ (4) $2n^3+3n^2+n$

指針 因数分解 因数分解の要領は

- ① 各項に共通因数があれば、まず、それをかっこの外にくくり出す。
 ② おき換えたり、項を適当に組み合わせたりすると、公式が利用できる形に変形できる場合がある。
 ③ 2種類以上の文字を含む式の因数分解では、まず、次数の低い方の文字について整理する。

解答 (1) $2ax^2-8a=2a(x^2-4)$ $\leftarrow 2a$ が共通因数。

$$=2a(x^2-2^2)$$

$$=2a(x+2)(x-2)$$
 答

 $\leftarrow$ 因数分解の公式2

(2) $ax^2+by^2-ay^2-bx^2$

$$=a(x^2-y^2)-b(x^2-y^2)$$

 $\leftarrow x, y$ について整理すると、
 $(a-b)$ が共通因数になる。

$$=(x^2-y^2)(a-b)$$

$$=(x+y)(x-y)(a-b)$$
 答

 $\leftarrow$ 因数分解の公式2

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & (x-4)(3x+1)+10 \\
 & =1 \cdot 3x^2 + \{1 \cdot 1 + (-4) \cdot 3\}x + (-4) \cdot 1 + 10 \\
 & =3x^2 - 11x + 6 \\
 & = (x-3)(3x-2) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \leftarrow \begin{array}{r} 1 \times -3 \rightarrow -9 \\ 3 \times -2 \rightarrow -6 \\ \hline 3 \quad 6 \quad -11 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & 2n^3 + 3n^2 + n \\
 & = n(2n^2 + 3n + 1) \\
 & = n(n+1)(2n+1) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \leftarrow \begin{array}{r} 1 \times 1 \rightarrow 2 \\ 2 \times 1 \rightarrow 2 \\ \hline 2 \quad 1 \quad 3 \end{array}
 \end{array}$$

教 p.24

4 次の式を因数分解せよ。

- (1) $4x^2 - y^2 + 2y - 1$ (2) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$
 (3) $x^3 + ax^2 - x^2 - a$ (4) $6x^2 + 7xy + 2y^2 + x - 2$
 (5) $3x^2 + 2xy - y^2 + 7x + 3y + 4$ (6) $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$
 (7) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

指針 因数分解 2つの文字を含む多項式の因数分解は、1つの文字について整理するか、項をうまく組み合わせて因数分解の公式が使えるように工夫する。

解答 (1) $4x^2 - y^2 + 2y - 1 = 4x^2 - (y^2 - 2y + 1)$
 $= 4x^2 - (y-1)^2 = \{2x + (y-1)\}\{2x - (y-1)\}$
 $= (2x + y - 1)(2x - y + 1) \quad \text{答}$

(2) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ $\leftarrow x^2 - x = A$ とおくと
 $A^2 - 8A + 12$ の因数分解になる。
 $= \{(x^2 - x) - 2\}\{(x^2 - x) - 6\}$
 $= (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6)$
 $= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3) \quad \text{答}$

(3) $x^3 + ax^2 - x^2 - a = x^2(x-1) + a(x^2-1) = x^2(x-1) + a(x+1)(x-1)$
 $= (x-1)\{x^2 + a(x+1)\}$
 $= (x-1)(x^2 + ax + a) \quad \text{答}$

(4) $6x^2 + 7xy + 2y^2 + x - 2$
 $= 6x^2 + (7y+1)x + (2y^2-2)$
 $= 6x^2 + (7y+1)x + 2(y+1)(y-1)$
 $= \{2x + (y-1)\}\{3x + 2(y+1)\}$
 $= (2x + y - 1)(3x + 2y + 2) \quad \text{答}$

$\leftarrow x$ の2次式とみて降べきの順に整理する。
 $\leftarrow \begin{array}{r} 2 \times y-1 \rightarrow 3(y-1) \\ 3 \times 2(y+1) \rightarrow 4(y+1) \\ \hline \quad \quad \quad 7y+1 \end{array}$

(5) $3x^2 + 2xy - y^2 + 7x + 3y + 4$
 $= 3x^2 + (2y+7)x - (y+1)(y-4)$
 $= \{x + (y+1)\}\{3x - (y-4)\}$
 $= (x+y+1)(3x-y+4) \quad \text{答}$

$\leftarrow x$ の2次式とみて降べきの順に整理する。
 $\leftarrow \begin{array}{r} 1 \times y+1 \rightarrow 3(y+1) \\ 3 \times -(y-4) \rightarrow -(y-4) \\ \hline \quad \quad \quad 2y+7 \end{array}$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc \\
 &= \{(a+b)+c\}\{c(a+b)+ab\}-abc \\
 &= c(a+b)^2+ab(a+b)+c^2(a+b)+abc-abc \\
 &= (a+b)\{c(a+b)+ab+c^2\} \\
 &= (a+b)\{c^2+(a+b)c+ab\} \\
 &= (a+b)(c+b)(c+a) \\
 &= (a+b)(b+c)(c+a) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \leftarrow & 1 & \begin{array}{c} b \rightarrow \\ a \rightarrow \end{array} & b \\
 & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ ab \end{array} & a \\
 & & & a+b
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) \\
 &= (-b+c)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-b^2c) \\
 &= -(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c) \\
 &= -(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\} \\
 &= -(b-c)(a-b)(a-c) \\
 &= (a-b)(b-c)(c-a) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.24

- 5 35 のように一の位の数^{けた}が5である2桁の自然数を2乗した値を簡単に求める方法を、 a を9以下の自然数として $(10a+5)^2$ の展開式から考察せよ。

指針 式の展開の利用 数の計算において、10の倍数の四則計算は考えやすいことを利用した方法である。2桁の自然数は、 b を0から9までの整数とすると、 $10a+b$ で表され、ここでは $b=5$ の場合を考える。

$(10a+5)^2=100a(a+1)+25$ と変形することがポイント。

解答 $(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$

a は9以下の自然数であるから、 $a(a+1)$ は90以下の自然数であり、 $100a(a+1)$ は100の倍数、すなわち、 $100a(a+1)$ の下2桁は00となる。したがって、 $100a(a+1)+25$ の下2桁は常に25であり、上2桁すなわち千の位と百の位^{けた}の数は $a(a+1)$ である。ただし、 $a(a+1)$ が1桁の数ならば千の位はない。

以上から、一の位の数^{けた}が5である2桁の自然数を2乗した値は、下2桁を25として、25の左、すなわち千の位と百の位である上2桁を、もとの数の十の位の数とその数に1を足した数の積にすればよい。ただし、もとの数の十の位の数^{けた}が1、2のときは、千の位は0であるから書かない。 答

参考 35²については、 $3 \times (3+1)=12$ であるから、1225となる。

第2節 実数

4 実数

A 有理数

まとめ

1 有理数

整数 m と 0 でない整数 n を用いて分数 $\frac{m}{n}$ の形に表される数を 有理数 という。

整数 m は $\frac{m}{1}$ と表されるので、有理数である。

2 有限小数と無限小数

小数第何位かで終わる小数を 有限小数 といい、小数点以下が限りなく続く小数を 無限小数 という。

3 循環小数

無限小数のうち、0.3181818…… のように、ある位以下では数字の同じ並びが繰り返される小数を 循環小数 という。

整数以外の有理数は、有限小数か循環小数のいずれかで表される。

逆に、有限小数と循環小数は必ず分数で表され、有理数である。

4 循環小数の表し方

$$\left. \begin{array}{l} 0.666\cdots = 0.\dot{6} \\ 0.3181818\cdots = 0.3\dot{1}\dot{8} \\ 1.234234234\cdots = 1.\dot{2}\dot{3}\dot{4} \end{array} \right\} \text{①}$$

参考 分母を素因数分解したとき、因数が 2 または 5 のみの場合、その分数は有限小数で表される。すなわち、分母を素因数分解したとき、2、5 以外の素因数をもつ分数を小数で表すと循環小数になる。

練習
25

教 p.25

次の分数を小数で表せ。ただし、循環小数は上の ① のような表し方で書け。

(1) $\frac{1}{8}$

(2) $\frac{8}{9}$

(3) $\frac{10}{27}$

(4) $\frac{25}{22}$

指針 分数を循環小数で表す (1) 以外は、分母の素因数分解で 2、5 以外の素因数をもつから循環小数になる。循環小数は小数の循環する部分の最初と最後の数の上に・をつけて表す。

解答 (1) $\frac{1}{8} = 0.125$ 答

$$(2) \frac{8}{9} = 0.888\cdots = 0.\dot{8} \quad \text{答}$$

$$(3) \frac{10}{27} = 0.3703703\cdots = 0.\dot{3}7\dot{0} \quad \text{答}$$

$$(4) \frac{25}{22} = 1.1363636\cdots = 1.1\dot{3}\dot{6} \quad \text{答}$$

練習
26

次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{1}$

(2) $0.2\dot{7}$

(3) $0.\dot{6}4\dot{8}$

(4) $0.2\dot{5}\dot{4}$

教 p.27

指針 循環小数を分数で表す まず循環小数を x とおく。 $10^n x$ (n は自然数) を求めて x との差を自然数にしてから x を求める。

解答 (1) $x = 0.\dot{1}$ とおく

$$x = 0.111\cdots, 10x = 1.111\cdots$$

$10x$ と x との差を考えると

$$9x = 1$$

$$\text{よって } x = \frac{1}{9} \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{r} \leftarrow 10x = 1.111\cdots \\ -) x = 0.111\cdots \\ \hline 9x = 1 \end{array}$$

(2) $x = 0.2\dot{7}$ とおく

$$x = 0.2727\cdots, 100x = 27.2727\cdots$$

$100x$ と x との差を考えると

$$99x = 27$$

$$\text{よって } x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11} \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{r} \leftarrow 100x = 27.2727\cdots \\ -) x = 0.2727\cdots \\ \hline 99x = 27 \end{array}$$

(3) $x = 0.\dot{6}4\dot{8}$ とおく

$$x = 0.648648\cdots, 1000x = 648.648648\cdots$$

$1000x$ と x との差を考えると

$$999x = 648$$

$$\text{よって } x = \frac{648}{999} = \frac{24}{37} \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{r} \leftarrow 1000x = 648.648648\cdots \\ -) x = 0.648648\cdots \\ \hline 999x = 648 \end{array}$$

(4) $x = 0.2\dot{5}\dot{4}$ とおく

$$10x = 2.5454\cdots, 1000x = 254.5454\cdots$$

$1000x$ と $10x$ との差を考えると

$$990x = 252$$

$$\text{よって } x = \frac{252}{990} = \frac{14}{55} \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{r} \leftarrow 1000x = 254.5454\cdots \\ -) 10x = 2.5454\cdots \\ \hline 990x = 252 \end{array}$$

参考 循環小数 $0.\dot{9}$ は 1 に等しいことを示そう。

上の練習 26 と同様に, $x = 0.\dot{9}$ とおく $x = 0.999\cdots$, $10x = 9.999\cdots$ であ

るから、 $10x$ と x の差を考えると $10x - x = 9$ すなわち、 $9x = 9$ から $x = 1$
よって、 $0.\dot{9}$ は 1 に等しい。

B 実数

C 数の範囲と四則計算

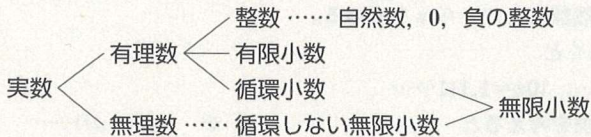
まとめ

1 実数

整数と、有限小数や無限小数で表される数とを合わせて **実数** という。

2 無理数

有理数でない実数を **無理数** という。無理数は、循環しない無限小数で表される数であり、分数で表すことはできない。



3 有理数・実数の性質

有理数、実数は、それぞれの数の範囲で常に四則計算ができる。

1 2つの有理数の和、差、積、商は常に有理数である。

2 2つの実数の和、差、積、商は常に実数である。

注意 加法、減法、乗法、除法をまとめて **四則** といい、四則計算の結果を、それぞれ、和、差、積、商という。ただし、除法において 0 で割ることは考えない。

練習
27

教 p.28

下の表は数の範囲と四則計算についてまとめたものである。

表の空らんには○か×のうち適切なものを入れよ。また、×の場合は、結果がその範囲にない計算の例を1つあげよ。

数の範囲	加法	減法	乗法	除法
自然数	○	×		
整数				
有理数				
実数				

■ 表の説明 ■

○は計算がその範囲で常にできる場合

×は計算がその範囲で常にできるとは限らない場合

指針 数の範囲と四則計算 自然数の和、積は常に自然数であるが、差、商は自然数とは限らない。

また、整数の和、差、積は常に整数であるが、商は整数とは限らない。

解答 答

数の範囲	加法	減法	乗法	除法
自然数	○	×	○	×
整数	○	○	○	×
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○

→ (例) $1-2$, $1 \div 2$

→ (例) $2 \div 3$

D 実数と数直線 E 絶対値

まとめ

1 数直線

直線上に基準となる点Oをとり実数0を対応させ、単位の長さ1と正の向きを定めると、この直線上の点に対して実数を対応させることができる。このように点と実数を対応させた直線を数直線といい、点Oを原点という。

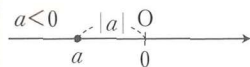
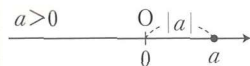
2 座標

数直線上で、点Pに実数 a が対応しているとき、 a を点Pの座標といい、座標が a である点Pを $P(a)$ で表す。

3 絶対値

数直線上で、実数 a に対応する点と原点との距離を a の絶対値といい、記号 $|a|$ で表す。

0の絶対値は $|0|=0$ である。



4 実数 a の絶対値

1 $|a| \geq 0$

2 $a \geq 0$ のとき $|a|=a$, $a < 0$ のとき $|a|=-a$

練習 28

次の値を求めよ。

(1) $|3|$

(2) $|-4|$

(3) $|\sqrt{2}|$

指針 絶対値 $|a|$ は、絶対値の定義から、次のように求める。

a が正の数なら、 a はそのまま $\rightarrow |a|=a$

a が負の数なら、符号を変える $\rightarrow |a|=-a$

解答 (1) $|3|=3$ 答

(2) $|-4|=-(-4)=4$ 答

(3) $|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ 答

教 p.29

練習
29

次の値を求めよ。

(1) $|-2+3|$

(2) $|1-5|$

(3) $|3-\pi|$

指針 絶対値 (1), (2) は, まず, $|$ 内を計算する。実数 a に対して $a \geq 0$ のとき $|a|=a$, $a < 0$ のとき $|a|=-a$

解答 (1) $|-2+3|=|1|=1$ 答

(2) $|1-5|=|-4|=-(-4)=4$ 答

(3) $3-\pi < 0$ であるから

$|3-\pi|=- (3-\pi)=\pi-3$ 答

研究 数直線上の2点間の距離

まとめ

数直線上の2点間の距離

数直線上の2点 $A(a)$, $B(b)$ 間の距離 AB は $a \leq b$ のとき

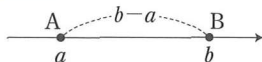
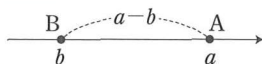
$$AB=b-a$$

 $a > b$ のとき

$$AB=a-b$$

であるから, 絶対値の記号を用いて, 次の1つの式で表される。

$$AB=|b-a|$$

 $a < b$  $a > b$ 練習
1

次の2点間の距離を求めよ。

(1) $A(2)$, $B(5)$

(2) $A(3)$, $B(-1)$

(3) $A(-2)$, $B(-6)$

指針 2点間の距離 数直線上の2点 $A(a)$, $B(b)$ 間の距離は

$$AB=|b-a|$$

解答 (1) $AB=|5-2|=|3|=3$ 答

(2) $AB=|-1-3|=|-4|=4$ 答

(3) $AB=|-6-(-2)|=|-4|=4$ 答

5 根号を含む式の計算

A 平方根

まとめ

1 平方根

ある数を2乗(平方)して a になるとき、その数を a の平方根という。



2 平方根の表し方

正の数 a の平方根は2つあり、それらは絶対値が等しく符号が異なる。その正の平方根を $\sqrt{a}$ と書く。負の平方根は $-\sqrt{a}$ である。記号 $\sqrt{\quad}$ を根号という。 $\sqrt{a}$ を「ルート a 」と読む。 a の平方根 $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ を合わせて $\pm\sqrt{a}$ と書く。

注意 記号 $\pm$ を複号といい、「プラスマイナス」と読む。

3 0の平方根

0の平方根は0だけであるから、 $\sqrt{0}=0$ となる。

4 平方根の性質

実数 a について

$$\left. \begin{array}{l} a \geq 0 \text{ のとき} \quad \sqrt{a^2} = a \\ a < 0 \text{ のとき} \quad \sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a \end{array} \right\} \sqrt{a^2} = |a|$$

教 p.31

練習
30

次の問いに答えよ。

(1) 6の平方根は何か。

(2) $\sqrt{16}$, $-\sqrt{\frac{9}{25}}$ の値を、それぞれ求めよ。

指針 平方根 正の数 a の平方根は2つあり、それらは絶対値が等しく符号が異なる。正の方を $\sqrt{a}$ 、負の方を $-\sqrt{a}$ 、まとめて $\pm\sqrt{a}$ と書く。また、 a が正の数のとき、 $\sqrt{a^2}=a$ である。

解答 (1) 6の平方根は $\sqrt{6}$ と $-\sqrt{6}$ すなわち $\pm\sqrt{6}$ **答**

(2) $\sqrt{16}$ は16の正の平方根で

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \quad \text{答}$$

$-\sqrt{\frac{9}{25}}$ は $\frac{9}{25}$ の負の平方根で

$$-\sqrt{\frac{9}{25}} = -\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5} \quad \text{答}$$

B 根号を含む式の計算

まとめ

1 平方根の積と商

 $a > 0, b > 0$ のとき

$$1 \quad \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad 2 \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

2 根号のついた数の変形

 $a > 0, k > 0$ のとき $\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$ 練習
31

次の式を計算せよ。

$$(1) \sqrt{2}\sqrt{3} \quad (2) \sqrt{2}\sqrt{8} \quad (3) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \quad (4) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$$

教 p.32

指針 平方根の積と商 次の公式を用いて計算する。

$$a, b \text{ が正の数のとき } \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

(4) 根号を含む式の計算では、根号の中の数は、できるだけ小さい数にするのが原則。

解答 (1) $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ 答

(2) $\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$ 答

(3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$ 答

(4) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{24}{2}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 答

練習
32

次の式を計算せよ。

$$(1) 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \qquad (2) \sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{72}$$

教 p.32

指針 根号を含む式の加法・減法 根号を含む式の加法・減法では、 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ などを文字のように考えて、同類項をまとめる要領で計算する。(2) まず、 $\sqrt{32}$, $\sqrt{72}$ を変形して根号内の数を最小にする。解答 (1) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = (5-2+1)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ 答

$$(2) \sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{72} = \sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ = (1+4-6)\sqrt{2} = -\sqrt{2} \quad \text{答}$$

練習
33

次の式を計算せよ。

(1) $(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$ (2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

(3) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (4) $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})$

指針 **根号を含む式の乗法** $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ を文字のように考えて、分配法則または展開の公式を利用して計算し、 $(\sqrt{a})^2$ の形が現れたら、 a とする。

解答 (1) $(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$

$$= 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{5}) + 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5})$$

$$= 8 \cdot 2 - 4\sqrt{10} + 6\sqrt{10} - 3 \cdot 5$$

$$= 1 + 2\sqrt{10} \quad \text{答}$$

(2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$

$$= 4 \cdot 3 - 4\sqrt{6} + 2 = 14 - 4\sqrt{6} \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} &\leftarrow (a-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

(3) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2$

$$= 3 - 2 = 1 \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} &\leftarrow (a+b)(a-b) \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

(4) $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2$

$$= 9 - 5 = 4 \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} &\leftarrow (a+b)(a-b) \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

C 分母の有理化

まとめ

分母の有理化

分母に根号を含む式を変形して、分母に根号を含まない形にすることを、分母を有理化するという。

練習
34

次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(2) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(4) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

指針 **分母の有理化** 分母が $\sqrt{a}$ のとき、分母・分子に $\sqrt{a}$ を掛けると、分母を有理化することができる。

解答 (1) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{答}$

(2) $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad \text{答}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{答}$

$$(4) \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{答}$$

注意 (4)では、分母 $2\sqrt{5}$ に対して、分母・分子に $2\sqrt{5}$ を掛けるのではなく、 $\sqrt{5}$ を掛ければよい。

また、(2)は $4=2 \times (\sqrt{2})^2$ と考えて約分しても分母の有理化ができる。

練習
35

次の式の分母を有理化せよ。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad (2) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \quad (3) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6} + 2} \quad (4) \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

指針 分母の有理化

分母が $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ のとき、 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ を、

分母が $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ のとき、 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ を

分母・分子に掛けると、分母を有理化することができる。

解答 (1) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2}$
 $= \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad \text{答}$

(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{5 - 3}$
 $= \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2} \quad \text{答}$

(3) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6} + 2} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)} = \frac{2\sqrt{18} - 4\sqrt{3}}{6 - 4} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{2}$
 $= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \quad \text{答}$

(4) $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}$
 $= 2 + \sqrt{3} \quad \text{答}$

参考 数学のいろいろな計算においては、分子を有理化することもある。たとえば
 $\frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$, $\sqrt{5} + \sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ など $(\sqrt{5} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{1})$ 。

D 式の値

練習
36

$x = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x + y$, xy

(2) $x^2 + y^2$

- 指針 (1) x, y の値を直接代入して式の値を求めることもできるが(次の練習 37 の解答参照), ここでは教科書の応用例題 4 と同様に, まず x, y をそれぞれ分母を有理化してから代入して, 式の値を求めてみよう。
- (2) x, y の値を直接代入しても求められるし, x, y の分母を有理化してから代入しても求められるが, (1) で求めた $x+y$ と xy の値を使って求める方が計算はラクである。

解答

$$x = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$$

$$(1) \quad x+y = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{7} \quad \text{答}$$

$$xy = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

$$(2) \quad x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 6 \quad \text{答}$$

練習
37

教 p.34

$x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}, y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

$$(1) \quad x+y, \quad xy \qquad (2) \quad x^2+y^2 \qquad (3) \quad x^2y+xy^2$$

指針 式の値 (1) a, b, x, y が有理数, $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ が無理数とすると, 分母が $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ と $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$ の組み合わせである 2 つの分数 A, B の和, 差, 積の計算では, $A \pm B$ のときは通分した分母が, AB では分母が, それぞれ有理数 a^2x-b^2y になるから, 最初に A, B それぞれの分母を有理化せずに, 直接計算してよい。

(2), (3) (1) の結果を利用する。

$$\text{解答 (1) } x+y = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2} \\ = 2\sqrt{2} \quad \text{答}$$

$$xy = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2-1^2} \\ = 1 \quad \text{答}$$

$$(2) \quad x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 = 6 \quad \text{答}$$

$$(3) \quad x^2y+xy^2 = xy(x+y) = 1 \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad \text{答}$$



4つの式 $x+y$, xy , x^2+y^2 , x^2y+xy^2 にはある共通な性質がある。
その性質を説明してみよう。

解答 答 それぞれの式で x と y を入れかえても、式を整理するともとの式と一致する。

参考 x , y で表された式で、 x と y を入れかえても整理するともとの式と一致する式を x と y の対称式といい、特に $x+y$ と xy を x と y の基本対称式という。 x と y のすべての対称式は、基本対称式 $x+y$ と xy を用いて表されることが知られている。

発展 2重根号

まとめ

2重根号

$$a > 0, b > 0 \text{ とする。} \quad \sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a > b \text{ のとき} \quad \sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

練習 1

次の式の2重根号をはずして簡単にせよ。

$$(1) \sqrt{7+2\sqrt{10}} \quad (2) \sqrt{12-6\sqrt{3}} \quad (3) \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

指針 2重根号 $\sqrt{p+2\sqrt{q}}$, $\sqrt{p-2\sqrt{q}}$ の形の数は

和が p , 積が q , すなわち $a+b=p$, $ab=q$ ($0 < b < a$)

となる2数 a , b がみつかりと

$$\sqrt{p+2\sqrt{q}} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{p-2\sqrt{q}} = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

と変形できる。

(2), (3) まず, 中の根号の前を2にする。

解答 (1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(5+2)+2\sqrt{5 \cdot 2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ 答

(2) $\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{12-2\sqrt{3^2 \cdot 3}} = \sqrt{(9+3)-2\sqrt{9 \cdot 3}}$

$$= \sqrt{9} - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$$
 答

$$\leftarrow \sqrt{9} - \sqrt{3} > 0$$

(3) $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}$

$$\leftarrow \frac{2-\sqrt{3}}{1} \text{ の分母と}$$

$$= \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3 \cdot 1}}}{\sqrt{2}}$$

分子に2を掛ける。

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

← 分母の有理化

第1章 第2節

問題

教 p.36

6 a が次の値をとるとき, $|a-3|-|a+2|$ の値を求めよ。

(1) $a=0$

(2) $a=5$

(3) $a=-4$

指針 絶対値を含む式の値 a の値を代入して, 絶対値の定義を用いて絶対値をはずす。

解答 (1) $|0-3|-|0+2|=|-3|-|2|=3-2=1$ 答

(2) $|5-3|-|5+2|=|2|-|7|=2-7=-5$ 答

(3) $|-4-3|-|-4+2|=|-7|-|-2|=7-2=5$ 答

教 p.36

7 x が次の値をとるとき, $\sqrt{(x+1)^2}$ の値を求めよ。

(1) $x=3$

(2) $x=-1$

(3) $x=-3$

指針 平方根 $\sqrt{(x+1)^2}$ に x の値を代入して, $\sqrt{a^2}$ の形にする。

このとき, a が正の数なら $\sqrt{a^2}=a$ a が負の数なら $\sqrt{a^2}=-a$

解答 (1) $\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(3+1)^2}=\sqrt{4^2}=4$ 答

(2) $\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(-1+1)^2}=\sqrt{0^2}=0$ 答

(3) $\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(-3+1)^2}=\sqrt{(-2)^2}=-(-2)=2$ 答

教 p.36

8 次の (1), (2) の式を計算せよ。また, (3)~(6) の式の分母を有理化せよ。

(1) $2\sqrt{27}-3\sqrt{12}+\sqrt{54}$

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

(3) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$

(4) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(5) $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$

(6) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$

指針 根号を含む式の計算

(1) $\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$ ($k>0$) を利用して, 根号の中の数をつできるだけ小さくしてから同類項をまとめる要領で計算する。

- (2) $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ を文字のように考えて、展開の公式 1 を利用する。
 (3) $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ であるから、分母・分子に $\sqrt{2}$ を掛ければよい。
 (6) $3+\sqrt{3}=\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$ に気がつくとはよい。

解答 (1) $2\sqrt{27}-3\sqrt{12}+\sqrt{54}=2\cdot 3\sqrt{3}-3\cdot 2\sqrt{3}+3\sqrt{6}=3\sqrt{6}$ **答**

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2$ $\leftarrow (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
 $=3+2\sqrt{18}+6=9+6\sqrt{2}$ **答**

(3) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **答**

(4) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$
 $=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$
 $=\frac{6+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+2}{3-2}=8+3\sqrt{6}$ **答**

(5) $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}}{1^2-(\sqrt{3})^2}$
 $=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1-3}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ **答**

(6) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
 $=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **答**

教 p.36

9 $\sqrt{2}=1.4142$ とするとき、分母の有理化を利用して、次の値を求めよ。

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

指針 根号を含む式の値 $\sqrt{2}=1.4142$ を直接代入すると計算が面倒である。まず、分母を有理化してから、 $\sqrt{2}=1.4142$ を代入して計算する。

解答 (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.4142}{2}$ $\leftarrow \sqrt{2}=1.4142$ を代入する。
 $=0.7071$ **答**

(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-1}=2+\sqrt{2}$
 $=2+1.4142=3.4142$ **答** $\leftarrow \sqrt{2}=1.4142$ を代入する。

10 $x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, $y = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 + y^2$

(2) $x^3y + xy^3$

(3) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

指針 式の値

(1) まず、 $x+y$ と xy の値を求める。 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ を利用。

(2) $x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)$ これに、(1)で計算した値を代入する。

(3) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}$ これに、(1)で計算した値を代入する。

解答

$$x+y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{15}+3+5+2\sqrt{15}+3}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$xy = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = 1$$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot 1=62$ 答

(2) $x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)=1\cdot 62=62$ 答

(3) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{62}{1} = 62$ 答

11 $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数の部分を a 、小数の部分を b とする。このとき、 a と b の値を求めよ。

指針 実数の整数の部分、小数の部分 たとえば、 $\sqrt{3}=1.732\cdots$ の整数の部分を x 、小数の部分を y とすると $x=1$, $y=0.732\cdots$ であるが、 y をそのまま答えとしては減点が零点になる。正しくは、 $x+y=\sqrt{3}$ から $y=\sqrt{3}-1$ と答える。この問題では、 $a+b=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ と表せて、まずこの右辺の分母を有理化する。

解答 問題文から $a+b = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1$

$1 < \sqrt{3} < 2$ であるから $2 < \sqrt{3}+1 < 3$

よって $a=2$, $b=(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1$ 答

12 $\sqrt{5}$ と $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は等しくないことを説明せよ。

指針 根号を含む数の大小 $\sqrt{5}$ と $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ をそれぞれ2乗した数を比べる。

$a^2 \neq b^2$ ならば $a \neq b$ が成り立つことを利用する。

解答 $(\sqrt{5})^2 = 5$, $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$
 $2\sqrt{6} > 0$ であるから $(\sqrt{5})^2 \neq (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

すなわち,

$(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \{\sqrt{5} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})\}\{\sqrt{5} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\} \neq 0$ であり,

$\sqrt{5} + (\sqrt{2} + \sqrt{3}) > 0$ であるから $\sqrt{5} - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \neq 0$

よって, $\sqrt{5} \neq \sqrt{2} + \sqrt{3}$ が成り立つ。終

参考 一般に, 正の数 a, b に対して, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ が成り立つ。

第3節 1次不等式

6 不等式の性質

A 不等式

まとめ

1 不等号の種類と意味

不等号	使い方の例	意 味
$<$	$A < B$	A は B より小さい
$>$	$A > B$	A は B より大きい
$\leq$	$A \leq B$	A は B 以下
$\geq$	$A \geq B$	A は B 以上

←「～より小さい」は「～未満」ともいう。

2 不等式

数量の間の大小関係を不等号を用いて表した式を不等式という。

不等式で使う文字が表す数は、断りがなければ実数の範囲で考える。

練習
38

教 p.37

次の数量の大小関係を不等式で表せ。

- (1) ある数 x の2倍に3を足した数は5以上である。
- (2) 2つの数 a , b の和は負で, -2 より大きい。
- (3) 1個150円の菓子を x 個買って120円の箱に詰めてもらったところ, 代金を支払うには1000円では足りなかった。

指針 不等式 数量の大小関係を述べた事柄を不等式で表すとき, 不等号 $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ のどれを使うか注意すること。

解答 (1) $2x+3 \geq 5$ 答

(2) $a+b < 0$ かつ $a+b > -2$

よって $-2 < a+b < 0$ 答

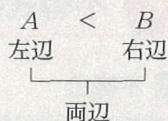
(3) $150x+120 > 1000$ 答

B 不等式の性質

まとめ

1 不等式

不等式でも等式の場合と同様に、不等号の左側の部分を左辺、右側の部分を右辺といい、左辺と右辺とを合わせて両辺という。



2 不等式の性質

両辺に同じ数を足しても、両辺の大小関係は変わらない。
 両辺から同じ数を引いても、両辺の大小関係は変わらない。
 両辺に同じ正の数を掛けても、両辺の大小関係は変わらない。
 両辺に同じ負の数を掛けると、両辺の大小関係は入れかわる。
 両辺を同じ数 c で割る場合は、 $\frac{1}{c}$ を掛けると考えればよい。

練習
39

教 p.39

次の各場合にも、教科書例 25 の①「 $a < b$ のとき $2a < 2b$, $-2a > -2b$ 」が成り立つことを数直線を用いて確かめよ。

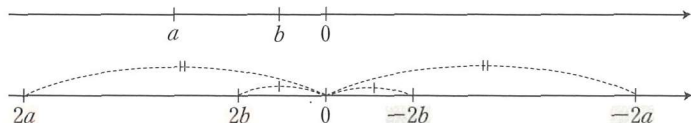
(1) $a < 0, b < 0$

(2) $a < 0, b > 0$

指針 2数の大小関係 不等式の両辺に同じ正の数を掛けても両辺の大小関係は変わらず、同じ負の数を掛けると両辺の大小関係は入れかわる。

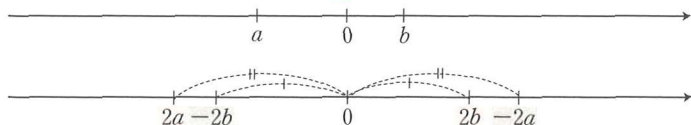
解答 (1) $a < 0, b < 0, a < b$ のとき、 $2a$ と $2b$, $-2a$ と $-2b$ の数直線上の位置関係は、下の図のようになる。

よって $2a < 2b, -2a > -2b$ 終



(2) $a < 0, b > 0$ のとき、 $a < b$ は常に成り立ち、 $2a$ と $2b$, $-2a$ と $-2b$ の数直線上の位置関係は、下の図のようになる。

よって $2a < 2b, -2a > -2b$ 終



練習
40 $a < b$ のとき、次の□に適する不等号>または<を入れよ。

(1) $3a \square 3b$

(2) $-3a \square -3b$

(3) $\frac{a}{2} \square \frac{b}{2}$

(4) $\frac{a}{-2} \square \frac{b}{-2}$

教 p.39

指針 不等式の性質の利用 不等式の両辺に同じ正の数を掛けても、両辺の大小関係は変わらない。一方、同じ負の数を掛けると、両辺の大小関係は入れかわる。

解答 (1) 両辺に同じ正の数を掛けても大小関係は変わらないから、 $a < b$ のとき

$3a \leq 3b$ 答

(2) 両辺に同じ負の数を掛けると大小関係は入れかわるから、 $a < b$ のとき

$-3a \geq -3b$ 答

(3) 両辺を同じ正の数で割っても両辺の大小関係は変わらないから、 $a < b$ の

とき $\frac{a}{2} \leq \frac{b}{2}$ 答

(4) 両辺を同じ負の数で割ると両辺の大小関係は入れかわるから、 $a < b$ のと

き $\frac{a}{-2} \geq \frac{b}{-2}$ 答

まとめ

不等式の性質 ※44 ページでも示した。

1 $A < B$ ならば $A + C < B + C$

2 $A < B$ ならば $A - C < B - C$

3 $A < B, C > 0$ ならば $AC < BC, \frac{A}{C} < \frac{B}{C}$

4 $A < B, C < 0$ ならば $AC > BC, \frac{A}{C} > \frac{B}{C}$

注意 不等式では、両辺に同じ負の数を掛けたり、両辺を同じ負の数で割ったりすると、両辺の大小関係が入れかわる。

教 p.39

練習
41 $a < b$ のとき、次の□に適する不等号>または<を入れよ。

(1) $4a + 1 \square 4b + 1$

(2) $1 - a \square 1 - b$

(3) $\frac{a}{2} - 3 \square \frac{b}{2} - 3$

(4) $-\frac{a}{5} + 2 \square -\frac{b}{5} + 2$

指針 不等式の性質の利用 不等式では、両辺に同じ負の数を掛けたり、両辺を同じ負の数で割ったりすると、不等号の向きが変わる。

解答 (1) $a < b$ のとき、両辺に正の数 4 を掛けても不等号の向きは変わらないから

$$4a < 4b$$

また、両辺に同じ数 1 を足しても不等号の向きは変わらないから

$$4a+1 \leq 4b+1 \quad \text{答}$$

(2) $a < b$ のとき、両辺に同じ負の数 -1 を掛けると不等号の向きは変わるから $-a > -b$

また、両辺に同じ数 1 を足しても不等号の向きは変わらないから

$$1-a \geq 1-b \quad \text{答}$$

(3) $a < b$ のとき、両辺を同じ正の数 2 で割っても不等号の向きは変わらない

$$\text{から} \quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2}$$

また、両辺から同じ数 3 を引いても不等号の向きは変わらないから

$$\frac{a}{2}-3 \leq \frac{b}{2}-3 \quad \text{答}$$

(4) $a < b$ のとき、両辺を同じ負の数 -5 で割ると不等号の向きは変わるから

$$\text{ら} \quad -\frac{a}{5} > -\frac{b}{5}$$

また、両辺に同じ数 2 を足しても不等号の向きは変わらないから

$$-\frac{a}{5}+2 \geq -\frac{b}{5}+2 \quad \text{答}$$

7 1 次不等式

A 1 次不等式とその解き方

まとめ

1 不等式の解

x のとるべき値を決める条件を表した不等式を、 x についての不等式といい、不等式を成り立たせる x の値を、その不等式の **解** という。

2 不等式を解く

不等式のすべての解を求めることを、その不等式を **解く** という。

不等式のすべての解の集まりを、不等式の **解** ということもある。

3 不等式の変形

「不等式の性質」の **1** と **2** により、不等式でも方程式の場合と同じように **移項** による式の変形ができる。

4 1 次不等式

不等式の項を移項して $(x \text{ の } 1 \text{ 次式}) > 0$, $(x \text{ の } 1 \text{ 次式}) \leq 0$ などのような形に表される不等式を、 x についての **1 次不等式** という。

5 1次不等式の解き方

基本的には、まず不等式を $ax > b$, $ax \leq b$ などの形に整理する。次に整理された不等式の両辺を x の係数 a で割る。

教 p.41

練習
42

次の1次不等式を解け。

(1) $5x - 2 < 2x + 4$

(2) $6x - 3 \geq 8x + 7$

(3) $2(4x - 1) \geq 5x - 11$

(4) $3(3 - 2x) < 4 - 3x$

指針 1次不等式の解き方 1次不等式は次の手順で解く。

- ① かっこのある不等式は、まず、かっこをはずす。
- ② 1次の項を左辺に、定数項を右辺に移項する。
- ③ 両辺をそれぞれ計算して、 $ax > b$, $ax \leq b$ などの形に整理する。
- ④ 両辺を x の係数 a で割る (a の符号に注意)。

解答 (1) 移項すると $5x - 2x < 4 + 2$

整理すると $3x < 6$

両辺を3で割って $x < 2$ 答

(2) 移項すると $6x - 8x \geq 7 + 3$

整理すると $-2x \geq 10$

両辺を-2で割って $x \leq -5$ 答

(3) かっこをはずして $8x - 2 \geq 5x - 11$

移項すると $8x - 5x \geq -11 + 2$

整理すると $3x \geq -9$

両辺を3で割って $x \geq -3$ 答

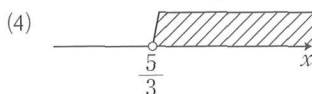
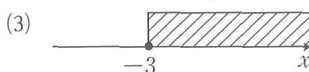
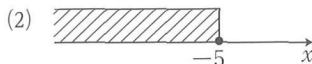
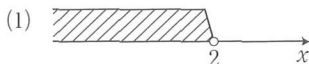
(4) かっこをはずして $9 - 6x < 4 - 3x$

移項すると $-6x + 3x < 4 - 9$

整理すると $-3x < -5$

両辺を-3で割って $x > \frac{5}{3}$ 答

注意 不等式の解を、数直線を用いて図示すると、次の図のようになる。



図中の白丸はその数が範囲に含まれない、また黒丸はその数が範囲に含まれることを示している。

練習
43

次の1次不等式を解け。

(1) $\frac{1}{2}x - 1 \leq \frac{2}{7}x + \frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{3}x + 1 < \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

指針 1次不等式の解き方 分数を含む不等式では、両辺に分母の最小公倍数を掛けて、係数を整数にしてから解く。

解答 (1) 両辺に14を掛けると $14\left(\frac{1}{2}x - 1\right) \leq 14\left(\frac{2}{7}x + \frac{1}{2}\right)$

すなわち

$7x - 14 \leq 4x + 7$

移項して整理すると

$3x \leq 21$

よって

$x \leq 7$ 答

(2) 両辺に12を掛けると $12\left(\frac{1}{3}x + 1\right) < 12\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)$

すなわち

$4x + 12 < 9x - 6$

移項して整理すると

$-5x < -18$

よって

$x > \frac{18}{5}$ 答

B 連立不等式

まとめ

連立不等式

いくつかの不等式を組み合わせたものを連立不等式といい、それらの不等式の解に共通する範囲を、この連立不等式の解という。また連立不等式の解を求めることを連立不等式を解くという。

練習
44

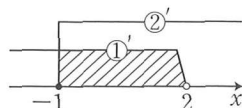
次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 6x - 9 < 2x - 1 \\ 3x + 7 \leq 4(2x + 3) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x + 1 \geq 7x - 5 \\ -x + 6 < 3(1 - 2x) \end{cases}$

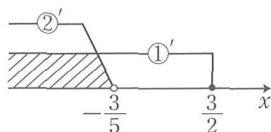
指針 連立不等式の解き方 それぞれの不等式を解き、解の共通する範囲を求める。また、共通する範囲を求めるとき、数直線を使って図示すると簡単である。

解答 (1) $\begin{cases} 6x - 9 < 2x - 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 7 \leq 4(2x + 3) & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

① から $4x < 8$ よって $x < 2$ $\cdots \cdots \textcircled{1}'$ ② から $3x + 7 \leq 8x + 12$ よって $-5x \leq 5$ 

したがって $x \geq -1$ …… ②'①' と ②' の共通範囲を求めて $-1 \leq x < 2$ 答

$$(2) \begin{cases} 3x+1 \geq 7x-5 & \cdots \cdots ① \\ -x+6 < 3(1-2x) & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

① から $-4x \geq -6$ よって $x \leq \frac{3}{2}$ …… ①'② から $-x+6 < 3-6x$ よって $5x < -3$ したがって $x < -\frac{3}{5}$ …… ②'①' と ②' の共通範囲を求めて $x < -\frac{3}{5}$ 答練習
45

教 p.43

次の不等式を解け。

$$3x < x+12 < 2x+8$$

指針 連立不等式の解き方 $A < B < C$ は、 $A < B$ と $B < C$ が同時に成り立つことと同じである。これを $A < B$ と $A < C$ が同時に成り立つと誤らないように注意する。

解答 $3x < x+12 < 2x+8$ から $\begin{cases} 3x < x+12 & \cdots \cdots ① \\ x+12 < 2x+8 & \cdots \cdots ② \end{cases}$

① から $3x < x+12$

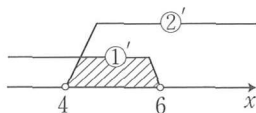
$$2x < 12$$

$$x < 6 \quad \cdots \cdots ①'$$

② から $x+12 < 2x+8$

$$-x < -4$$

$$x > 4 \quad \cdots \cdots ②'$$

①' と ②' の共通範囲を求めて $4 < x < 6$ 答

C 1 次不等式の応用

教 p.43

練習
46次の不等式を満たす最小の自然数 n を求めよ。

$$600 + 25(n-20) \leq 32n$$

指針 1 次不等式を満たす最小の自然数 まず、 n を実数と考えて 1 次不等式を解く。そして、自然数 n のとる値の範囲を定めて、最小の自然数 n を求める。

解答 かっこをはずすと $600+25n-500 \leq 32n$
 移項して整理すると $-7n \leq -100$
 よって $n \geq \frac{100}{7} = 14.2\cdots$
 これを満たす最小の自然数 n は $n=15$ **答**

練習
47

次の不等式を満たす最大の自然数 n を求めよ。

$$4 + \frac{1}{5}(n-4) > \frac{1}{2}n$$

指針 1次不等式を満たす最大の自然数 練習46と同じ方針で求める。1次不等式は、両辺に5と2の最小公倍数10を掛けて解く。

解答 両辺に10を掛けて $10\left\{4 + \frac{1}{5}(n-4)\right\} > 10 \times \frac{1}{2}n$
 すなわち $40 + 2(n-4) > 5n$
 かっこをはずして $40 + 2n - 8 > 5n$
 移項して整理すると $-3n > -32$
 よって $n < \frac{32}{3} = 10.6\cdots$
 これを満たす最大の自然数 n は $n=10$ **答**

深める

教 p.43

解が存在しない連立不等式もある。 $2x-4 \geq 0$ のように左辺が x の1次式、右辺が数であるような1次不等式を2つ組み合わせた連立不等式で解が存在しないものを1つ作ってみよう。

指針 連立不等式 $\begin{cases} ax+b \geq 0 \\ cx+d \geq 0 \end{cases}$ を考えてみよう。ただし、 $a > 0, c > 0$ とする。

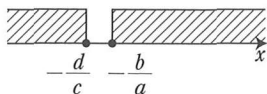
このとき、 $ax+b \geq 0$ から $x \geq -\frac{b}{a}$, $cx+d \geq 0$ から $x \geq -\frac{d}{c}$

この場合、 $-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}$ の値に関係なく、連立不等式の解は必ず存在する。

ゆえに、解が存在しない連立不等式の例として $\begin{cases} ax+b \geq 0 \\ cx+d \leq 0 \end{cases}$, $a > 0, c > 0$ を考えると

$$ax+b \geq 0 \text{ より } x \geq -\frac{b}{a},$$

$$cx+d \leq 0 \text{ より } x \leq -\frac{d}{c}$$



よって、 $-\frac{b}{a} > -\frac{d}{c}$ の場合を考えればよい。

解答
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 \leq 0 \end{cases}$$
 答

まとめ

1 次不等式の応用

不等式の応用問題は、次の手順で解く。

- ① 問題をよく読み、わかっている量、求める量をはっきりさせる。
- ② 求める量などを x とおき、 x のとりうる値の範囲を考える。
- ③ 単位に注意して、数量の大小関係から不等式を作る。
- ④ ③ の不等式を解く。
- ⑤ 不等式の解のうち、② の範囲に適する量を答えとする。

練習
48

教 p.44

1 個 120 円の菓子 A と 1 個 80 円の菓子 B を合わせて 30 個買い、100 円の箱に詰めてもらう。菓子代と箱代の合計金額を 3000 円以下にすると、菓子 A は最大で何個買えるか。

指針 1 次不等式の応用 菓子 A を x 個買うとすると、菓子 B は $(30-x)$ 個となり、箱代を含めた代金は $\{120x+80(30-x)+100\}$ 円である。この代金が 3000 円以下という条件から不等式を作る。

解答 菓子 A を x 個買うとすると、菓子 B は $(30-x)$ 個買うから、菓子代と箱代の合計金額は $120x+80(30-x)+100$ (円)

これが 3000 円以下であるから $120x+80(30-x)+100 \leq 3000$

整理すると $40x \leq 500$ すなわち $x \leq \frac{25}{2} = 12.5$

これを満たす最大の整数 x は $x=12$

よって、菓子 A は最大で 12 個買える。 答 12 個

練習
49

教 p.44

案内状を作ることになったので制作費を調べた。A 店では、100 部までは 5000 円、100 部を超える分は 1 部につき 40 円である。また、B 店では、100 部までは 4500 円、100 部を超える分は 1 部につき 43 円である。B 店で作るより A 店で作る方が安くなるのは、何部以上作るときか。

指針 1 次不等式の応用 案内状を x 部作るとする。 $x > 100$ として不等式を作る。

解答 案内状を x 部作るとする。

$x \leq 100$ のとき, A店では 5000 円, B店では 4500 円で, B店で作る方が安いから, $x > 100$ である。このとき

$$\text{A店での制作費は } 5000 + 40(x - 100) \text{ (円)}$$

$$\text{B店での制作費は } 4500 + 43(x - 100) \text{ (円)}$$

よって, B店よりA店の方が安くなるとき

$$5000 + 40(x - 100) < 4500 + 43(x - 100)$$

$$\text{整理すると } 3x > 800$$

$$\text{よって } x > \frac{800}{3} = 266.66\cdots$$

これを満たす最小の整数 x は $x = 267$ **答** 267 部以上

8 絶対値を含む方程式・不等式

A 絶対値を含む方程式・不等式

まとめ

絶対値を含む方程式・不等式の解

c が正の定数のとき

$$\text{方程式 } |x| = c \text{ の解は } x = \pm c$$

$$\text{不等式 } |x| < c \text{ の解は } -c < x < c$$

$$\text{不等式 } |x| > c \text{ の解は } x < -c, c < x$$

注意 「 $x < -c, c < x$ 」は, $x < -c$ と $c < x$ を合わせた範囲を表す。

練習 50

次の方程式, 不等式を解け。

(1) $|x| = 2$

(2) $|x| < 5$

(3) $|x| \geq 4$

教 p.45

指針 絶対値を含む方程式, 不等式 教科書 p. 45 例 30 と同様に考える。

解答 (1) 方程式 $|x| = 2$ の解は

$$x = \pm 2 \quad \text{答}$$

(2) 不等式 $|x| < 5$ の解は

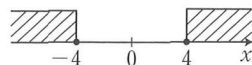
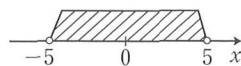
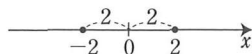
右の図から

$$-5 < x < 5 \quad \text{答}$$

(3) 不等式 $|x| \geq 4$ の解は

右の図から

$$x \leq -4, 4 \leq x \quad \text{答}$$



練習
51

次の方程式、不等式を解け。

- (1) $|x+4|=2$ (2) $|x+1|<1$ (3) $|x-2|\geq 1$
 (4) $|2x-3|=1$ (5) $|3x-2|\leq 4$ (6) $|2x+5|>2$

1
章数
と
式指針 絶対値を含む方程式、不等式 $c>0$ とする。

- (1) $x+4=X$ とおくと $|X|=2$ $|X|=c$ の解は $X=\pm c$
 (2) $x+1=X$ とおくと $|X|<1$ $|X|<c$ の解は $-c<X<c$
 (3) $x-2=X$ とおくと $|X|\geq 1$
 $|X|\geq c$ の解は $X\leq -c, c\leq X$

- 解答 (1) $|x+4|=2$ から $x+4=\pm 2$
 よって $x=-2, -6$ 答
 (2) $|x+1|<1$ から $-1<x+1<1$
 各辺から 1 を引いて $-2<x<0$ 答
 (3) $|x-2|\geq 1$ から $x-2\leq -1, 1\leq x-2$
 よって $x\leq 1, 3\leq x$ 答
 (4) $|2x-3|=1$ から $2x-3=\pm 1$
 すなわち $2x=4, 2$
 よって $x=2, 1$ 答
 (5) $|3x-2|\leq 4$ から $-4\leq 3x-2\leq 4$
 各辺に 2 を足して $-2\leq 3x\leq 6$
 各辺を 3 で割って $-\frac{2}{3}\leq x\leq 2$ 答
 (6) $|2x+5|>2$ から $2x+5<-2, 2<2x+5$
 すなわち $2x<-7, -3<2x$
 よって $x<-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}<x$ 答

注意 (1) 解は $x=-2$ と $x=-6$ で、簡潔に $x=-2, -6$ と書いてよい。

研究 絶対値と場合分け

まとめ

絶対値

- $A\geq 0$ のとき $|A|=A$
 $A<0$ のとき $|A|=-A$

練習
1

教科書例1にならって、次の式の絶対値記号をはずせ。

(1) $|x-3|$ (2) $|x+2|$ (3) $|2x-3|$

指針 絶対値と場合分け 絶対値記号の中の符号で場合分けをして、絶対値記号をはずす。 $A \geq 0$ のとき $|A| = A$, $A < 0$ のとき $|A| = -A$ である。

解答 (1) $x-3 \geq 0$ のとき $|x-3| = x-3$
 $x-3 < 0$ のとき $|x-3| = -(x-3) = -x+3$
 よって $x \geq 3$ のとき $|x-3| = x-3$
 $x < 3$ のとき $|x-3| = -x+3$ 答

(2) $x+2 \geq 0$ のとき $|x+2| = x+2$
 $x+2 < 0$ のとき $|x+2| = -(x+2) = -x-2$
 よって $x \geq -2$ のとき $|x+2| = x+2$
 $x < -2$ のとき $|x+2| = -x-2$ 答

(3) $2x-3 \geq 0$ のとき $|2x-3| = 2x-3$
 $2x-3 < 0$ のとき $|2x-3| = -(2x-3) = -2x+3$
 よって $x \geq \frac{3}{2}$ のとき $|2x-3| = 2x-3$
 $x < \frac{3}{2}$ のとき $|2x-3| = -2x+3$ 答

練習
2

次の方程式、不等式を解け。

(1) $|x-3| = 2x$ (2) $|x-4| \leq 2x+1$ (3) $|x+1| > 5x$

指針 絶対値を含む方程式、不等式 まず、絶対値記号の中の符号で場合分けをして絶対値記号をはずし、方程式、不等式を解く。方程式、不等式の解と、 x の値の範囲とを比べ合わせて解とする。

解答 (1) [1] $x-3 \geq 0$ すなわち $x \geq 3$ のとき
 方程式は $x-3 = 2x$
 よって $x = -3$ これは $x \geq 3$ を満たさない。

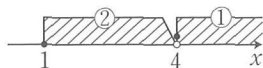
[2] $x-3 < 0$ すなわち $x < 3$ のとき
 方程式は $-(x-3) = 2x$
 よって $x = 1$ これは $x < 3$ を満たす。

[1], [2] から、求める解は $x = 1$ 答

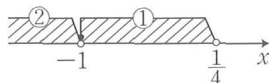
(2) [1] $x \geq 4$ のとき
 不等式は $x-4 \leq 2x+1$ よって $x \geq -5$
 これと $x \geq 4$ との共通範囲は $x \geq 4$ …… ①

[2] $x < 4$ のとき不等式は $-(x-4) \leq 2x+1$ よって $x \geq 1$ これと $x < 4$ との共通範囲は $1 \leq x < 4$ …… ②

求める解は、①と②を合わせた範囲で

 $x \geq 1$ 答(3) [1] $x \geq -1$ のとき不等式は $x+1 > 5x$ よって $x < \frac{1}{4}$ これと $x \geq -1$ との共通範囲は $-1 \leq x < \frac{1}{4}$ …… ①[2] $x < -1$ のとき不等式は $-(x+1) > 5x$ よって $x < -\frac{1}{6}$ これと $x < -1$ との共通範囲は $x < -1$ …… ②

求める解は、①と②を合わせた範囲で

 $x < \frac{1}{4}$ 答

参考 練習 51 の指針 で示した、不等式 $|X| < c$, $|X| \geq c$ のような、右辺が定数 c の場合の解法は、右辺が x を含む式（ただし、絶対値は付いていない式）であっても通用する。たとえば、練習 2 の (2), (3) の解は、下の **別解** のように、絶対値の中の式の符号で場合分けすることなく求められる。ただし、この **別解** が正しいことを厳密に示すことはここでは難しく、**別解** の解法はあくまでも検算用として使い、実際に答案を書くときは、練習 2 の解答のように、場合分けをした解法を書くようにする。

別解 (2) $|x-4| \leq 2x+1$ は、 $-(2x+1) \leq x-4 \leq 2x+1$ と同じである。

ゆえに $-(2x+1) \leq x-4$ から $x \geq 1$, $x-4 \leq 2x+1$ から $x \geq -5$ これらの共通範囲が求める解で $x \geq 1$ 答

(3) $|x+1| > 5x$ は、 $x+1 > 5x$, $x+1 < -5x$ と同じである。

ゆえに $x+1 > 5x$ から $x < \frac{1}{4}$, $x+1 < -5x$ から $x < -\frac{1}{6}$ これらを合わせた範囲が求める解で $x < \frac{1}{4}$ 答

第1章 第3節

問題

教 p.48

13 次の不等式を解け。

(1) $36 - x < 2(12 + x)$

(2) $\frac{x}{3} + \frac{10 - x}{2} \geq 4$

(3)
$$\begin{cases} 2x + 6 > 5x - 12 \\ 3x - 7 \leq 2(4 - x) \end{cases}$$

(4) $0.05 \leq 0.2 - \frac{x}{100} \leq 0.1$

指針 不等式の解き方

(4) $A \leq ax + b \leq B$ の形の不等式は、不等式の性質を使って、このままの形で変形して解くと簡単である。解答 (1) $36 - x < 2(12 + x)$

$$36 - x < 24 + 2x$$

$$-3x < -12$$

$$x > 4 \quad \text{答}$$

(2) $\frac{x}{3} + \frac{10 - x}{2} \geq 4$ 両辺に 6 を掛けて

$$2x + 30 - 3x \geq 24 \quad \text{すなわち} \quad -x \geq -6$$

$$\text{よって} \quad x \leq 6 \quad \text{答}$$

(3)
$$\begin{cases} 2x + 6 > 5x - 12 & \cdots \cdots \text{①} \\ 3x - 7 \leq 2(4 - x) & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

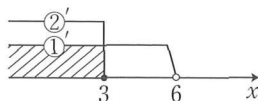
① から $-3x > -18$

ゆえに $x < 6 \quad \cdots \cdots \text{①}'$

② から $3x - 7 \leq 8 - 2x$

よって $x \leq 3 \quad \cdots \cdots \text{②}'$

①' と ②' の共通範囲を求めて $x \leq 3 \quad \text{答}$



(4) $0.05 \leq 0.2 - \frac{x}{100} \leq 0.1$

各辺に 100 を掛けて $5 \leq 20 - x \leq 10$

各辺から 20 を引いて $-15 \leq -x \leq -10$

各辺に -1 を掛けて $15 \geq x \geq 10$

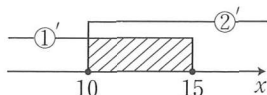
よって $10 \leq x \leq 15 \quad \text{答}$

別解 (4) $0.05 \leq 0.2 - \frac{x}{100} \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad 0.2 - \frac{x}{100} \leq 0.1 \quad \cdots \cdots \text{②}$

① から $5 \leq 20 - x$

よって $x \leq 15 \quad \cdots \cdots \text{①}'$

② から $20 - x \leq 10$



よって $x \geq 10$ …… ②'

①' と ②' の共通範囲を求めて

$$10 \leq x \leq 15 \quad \text{答}$$

教 p.48

- 14 x についての不等式 $x+a \geq 3x+5$ の解が $x \leq 3$ のとき、定数 a の値を求めよ。

指針 不等式の解から定数の決定 まず不等式を x について解き、解が $x \leq 3$ であることから a の値を求める。

解答 $x+a \geq 3x+5$ から $-2x \geq 5-a$ ゆえに $x \leq \frac{a-5}{2}$

これが $x \leq 3$ と一致するから $\frac{a-5}{2} = 3$

よって、 $a-5=6$ から $a=11$ 答

教 p.48

- 15 和が 40 である異なる 2 つの数がある。大きい数を $\frac{1}{4}$ 倍すると小さい数よりも小さくなるという。大きい数のとりうる値の範囲を求めよ。

指針 連立不等式の利用 大きい数を x とすると小さい数は $(40-x)$ と表される。大小関係から不等式を作る。

解答 大きい数を x とすると、小さい数は $40-x$ と表される。

よって $\frac{1}{4}x < 40-x < x$

すなわち
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x < 40-x & \dots\dots ① \\ 40-x < x & \dots\dots ② \end{cases}$$

① を解いて $x < 32$ …… ①'

② を解いて $x > 20$ …… ②'

①' と ②' の共通範囲は $20 < x < 32$

答 20 より大きく 32 より小さい

教 p.48

- 16 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|x-3|=5$

(2) $|x+4| \geq 1$

(3) $|2x-1| < 7$

(4) $|3x+5| \geq 2$

指針 絶対値を含む方程式、不等式 $c > 0$ のとき、方程式 $|x|=c$ の解は $x=\pm c$ 、不等式 $|x|<c$ の解は $-c < x < c$ 、不等式 $|x| \geq c$ の解は $x \leq -c$ 、 $c \leq x$ であ

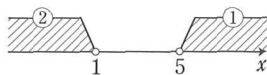
る。

解答 (1) $|x-3|=5$ から $x-3=\pm 5$ よって $x=8, -2$ **答**(2) $|x+4|\geq 1$ から $x+4\leq -1, 1\leq x+4$ よって $x\leq -5, -3\leq x$ **答**(3) $|2x-1|<7$ から $-7<2x-1<7$ 各辺に1を足して $-6<2x<8$ 各辺を2で割って $-3<x<4$ **答**(4) $|3x+5|\geq 2$ から $3x+5\leq -2, 2\leq 3x+5$ すなわち $3x\leq -7, -3\leq 3x$ よって $x\leq -\frac{7}{3}, -1\leq x$ **答**

研究

17. 次の方程式, 不等式を解け。

教 p.48

(1) $|2x-4|=x+1$ (2) $|2x-4|>x+1$ **指針** 絶対値を含む方程式, 不等式 x の値の範囲で場合分けして, 絶対値記号をはずす。 $A\geq 0$ のとき $|A|=A$, $A<0$ のとき $|A|=-A$ である。(2) 本書の55ページの**参考**で示した, 場合分けをしない**別解**もある。**解答** (1) [1] $2x-4\geq 0$ すなわち $x\geq 2$ のとき方程式は $2x-4=x+1$ よって $x=5$ これは, $x\geq 2$ を満たす。[2] $2x-4<0$ すなわち $x<2$ のとき方程式は $-(2x-4)=x+1$ よって $x=1$ これは, $x<2$ を満たす。[1], [2] から, 求める解は $x=1, 5$ **答**(2) (1)と同様にして, $|2x-4|$ の絶対値記号をはずして[1] $x\geq 2$ のとき不等式は $2x-4>x+1$ よって $x>5$ これと $x\geq 2$ との共通範囲は $x>5$ …… ①[2] $x<2$ のとき不等式は $-(2x-4)>x+1$ よって $x<1$ これと $x<2$ との共通範囲は $x<1$ …… ②求める解は, ①と②を合わせた範囲で $x<1, 5<x$ **答****別解** (2) $|2x-4|>x+1$ は, $2x-4>x+1, 2x-4<-(x+1)$ と同じである。

ゆえに $2x-4>x+1$ から $x>5$, $2x-4<-(x+1)$ から $x<1$
 よって、求める解はこれらを合わせた範囲で $x<1, 5<x$ 答

教 p.48

18 不等式 $5-x<4x<2x+8$ …… (A) に対して、次の連立不等式を考える。

$$\begin{cases} 5-x<4x \\ 5-x<2x+8 \end{cases} \quad \text{…… (B)}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 連立不等式 (B) の解のうち、不等式 (A) を満たさない最小の整数を求めよ。
- (2) 連立不等式 (B) を解いて不等式 (A) の解を求めることができない理由を説明せよ。

指針 連立不等式の解 不等式 (A) を (B) のように書き表すと、 $\begin{cases} 5-x<4x \\ 4x<2x+8 \end{cases}$ となり、

両者の違いは 2 番目の不等式であることはすぐにわかる。

- (1) まず、不等式 (A), (B) をそれぞれ解く。

解答 (1) 不等式 (A) を解くと

$$5-x<4x \text{ から } -5x<-5 \quad \text{すなわち} \quad x>1 \quad \text{…… ①}$$

$$4x<2x+8 \text{ から } 2x<8 \quad \text{すなわち} \quad x<4 \quad \text{…… ②}$$

ゆえに、不等式 (A) の解は、① と ② の共通範囲を求めて

$$1<x<4 \quad \text{…… ③}$$

次に、連立不等式 (B) を解くと

$$5-x<2x+8 \text{ から } -3x<3 \quad \text{すなわち} \quad x>-1 \quad \text{…… ④}$$

よって、連立不等式 (B) の解は、① と ④ の共通範囲を求めて

$$x>1 \quad \text{…… ⑤}$$

ここで、③ を満たさない x の値の範囲は $x \leq 1, 4 \leq x$ であるから、この範囲で ⑤ を満たす x の値の範囲は $4 \leq x$

したがって、⑤ を満たす整数のうち、③ を満たさない最小のものは

$$4 \quad \text{答}$$

- (2) 不等式 (A) は、連立不等式 $\begin{cases} 5-x<4x \\ 4x<2x+8 \end{cases}$ と表されるから、 $4x<2x+8$ と

連立不等式 (B) の $5-x<2x+8$ が異なる。すなわち、連立不等式 (B) の解には、 $4x \geq 2x+8$ となるような x の値も含まれてしまうから、連立不等式 (B) を解いて不等式 (A) の解を求めることはできない。

たとえば、(1) で求めた $x=4$ は、連立不等式 (B) の解には含まれるが、不等式 (A) の解には含まれない。 終

第1章 章末問題 A

教 p.49

1. 次の式を展開し、 x について降べきの順に整理せよ。

(1) $(x^3+4-3x)(1-2x)$

(2) $(x-a)(x-b)(x-c)$

(3) $(x^2-x+1)(x^2-x+3)$

(4) $(x+1)(x+2)(x-5)(x-6)$

(5) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+6)$

指針 式の展開の工夫 (1), (2) 分配法則を繰り返し用いて計算する。

(3) $x^2-x=A$ とおくと, $(A+1)(A+3)$ の展開になる。

(4), (5) 積の組み合わせと, おき換えを考える。

解答 (1) $(x^3+4-3x)(1-2x) = (x^3+4-3x) \cdot 1 + (x^3+4-3x) \cdot (-2x)$
 $= x^3+4-3x-2x^4-8x+6x^2$
 $= -2x^4+x^3+6x^2-11x+4$ 答

(2) $(x-a)(x-b)(x-c)$
 $= \{x^2-(a+b)x+ab\}(x-c)$
 $= \{x^2-(a+b)x+ab\}x + \{x^2-(a+b)x+ab\}(-c)$
 $= x^3-(a+b)x^2+abx-cx^2+(a+b)cx-abc$
 $= x^3-(a+b+c)x^2+\{ab+(a+b)c\}x-abc$
 $= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$ 答

(3) $(x^2-x+1)(x^2-x+3) = \{(x^2-x)+1\}\{(x^2-x)+3\}$
 $= (x^2-x)^2+4(x^2-x)+3$
 $= x^4-2x^3+x^2+4x^2-4x+3$
 $= x^4-2x^3+5x^2-4x+3$ 答

(4) $(x+1)(x+2)(x-5)(x-6)$
 $= (x+1)(x-5) \times (x+2)(x-6)$
 $= \{(x^2-4x)-5\}\{(x^2-4x)-12\}$
 $= (x^2-4x)^2-17(x^2-4x)+60$
 $= x^4-8x^3+16x^2-17x^2+68x+60$
 $= x^4-8x^3-x^2+68x+60$ 答

(5) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+6)$
 $= (x-1)(x+6) \times (x-2)(x+3)$
 $= \{(x^2-6)+5x\}\{(x^2-6)+x\}$
 $= (x^2-6)^2+6x(x^2-6)+5x^2$
 $= x^4-12x^2+36+6x^3-36x+5x^2$
 $= x^4+6x^3-7x^2-36x+36$ 答

積の組み合わせを工夫
 すると, (4) x^2-4x ,
 (5) x^2-6 のように,
 同じ式が出てくるね。



2. 次の式を因数分解せよ。

(1) $6x^2 + (3a - 2b)x - ab$

(2) $x^2 + y^2 - 2xy - z^2$

(3) $3x^2 + ax - 2a^2 + 4x - a + 1$

(4) $ab^2 - bc^2 - b^2c - c^2a$

指針 いろいろな方法による因数分解

(2) 項の組み合わせを工夫する。

(3) x について、 $3x^2 + (a$ の 1 次式) $x - (a$ の 2 次式) の形に整理すると、因数分解の公式 4 (たすき掛け) が利用できる。(4) 最低次の文字 a について整理する。解答 (1) $6x^2 + (3a - 2b)x - ab$

$$= (2x + a)(3x - b) \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{rcl} \leftarrow & 2 & \times & a \rightarrow 3a \\ & 3 & & -b \rightarrow -2b \\ \hline & 6 & & -ab \quad 3a-2b \end{array}$$

(2) $x^2 + y^2 - 2xy - z^2 = (x - y)^2 - z^2$

$$= \{(x - y) + z\} \{(x - y) - z\}$$

$$= (x - y + z)(x - y - z) \quad \text{答}$$

(3) $3x^2 + ax - 2a^2 + 4x - a + 1$

$$= 3x^2 + (a + 4)x - (2a^2 + a - 1)$$

$$= 3x^2 + (a + 4)x - (a + 1)(2a - 1)$$

$$= \{x + (a + 1)\} \{3x - (2a - 1)\}$$

$$= (x + a + 1)(3x - 2a + 1) \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{rcl} \leftarrow & 1 & \times & a+1 \rightarrow 3a+3 \\ & 3 & & -(2a-1) \rightarrow -2a+1 \\ \hline & & & a+4 \end{array}$$

(4) $ab^2 - bc^2 - b^2c - c^2a = (b^2 - c^2)a - bc(b + c)$

$$= (b + c)(b - c)a - bc(b + c)$$

$$= (b + c)\{(b - c)a - bc\}$$

$$= (b + c)(ab - bc - ca) \quad \text{答}$$

3. 次の式を計算せよ。

(1) $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

(2) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{32}}$

(4) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

(5) $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + 2}$

指針 根号を含む式の計算

(2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = A$ とおくと、和と差の積の形。

(3)~(5) まず、各分数の分母を有理化する。次に、同類項をまとめる要領で

計算すればよい。

解答 (1) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

$$\begin{aligned}
 &= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \\
 &= 1 + 2 + 3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} \\
 &= 6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

(2) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 5 \\
 &= 5 + 2\sqrt{6} - 5 \\
 &= 2\sqrt{6} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)\sqrt{2} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{8} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

(4) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + \frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3} + \frac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3} \\
 &= (7-4\sqrt{3}) + (7+4\sqrt{3}) \\
 &= 14 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

(5) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\
 &= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} \\
 &= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + 2-\sqrt{3} \\
 &= 1 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.49

4. 次の場合について、 $\sqrt{x^2-2x+1}$ を x の多項式で表せ。(1) $x \geq 1$ (2) $x < 1$

指針 根号をはずす $\sqrt{x^2-2x+1} = |x-1|$ である。絶対値の定義に従って、絶対値記号をはずす。

解答 $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

(1) $x \geq 1$ のとき $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$ 答

(2) $x < 1$ のとき $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = -(x - 1) = -x + 1$ 答

教 p.49

5. 次の不等式を満たす自然数 n をすべて求めよ。

$$\frac{1}{2}(n+3) + \frac{1}{6} > \frac{1}{3}(4n-1)$$

指針 不等式を満たす自然数を求める まず不等式を解いて n の範囲を求める。 n が自然数であることから n を求める。

解答 $\frac{1}{2}(n+3) + \frac{1}{6} > \frac{1}{3}(4n-1)$ 両辺に 6 を掛けると

$$3(n+3) + 1 > 2(4n-1) \quad \text{すなわち} \quad 3n + 10 > 8n - 2$$

よって、 $-5n > -12$ を解いて $n < \frac{12}{5} = 2.4$

n は自然数であるから $n = 1, 2$ 答

教 p.49

6. 4 km の道のりを、歩くか走るかして行くことにした。ただし、歩くときの速さは分速 80 m で、走るときの速さは分速 200 m である。目的地に着くまでにかかる時間を 32 分以上 35 分以下にすると、歩く道のりを何 m 以上何 m 以下にすればよいか。

指針 連立不等式の応用 歩く道のりを x m として 時間 = $\frac{\text{道のり}}{\text{速さ}}$ から、時間についての不等式を作る。 $p \leq ax + b \leq q$ の形の x についての不等式は、不等式の性質を使って解くと簡単である。

解答 歩く道のりを x m とすると、かかる時間は

$$\frac{x}{80} + \frac{4000 - x}{200} \text{ (分)}$$

かかる時間が 32 分以上 35 分以下であるから

$$32 \leq \frac{x}{80} + \frac{4000 - x}{200} \leq 35$$

各辺に 400 を掛けると

$$12800 \leq 5x + 2(4000 - x) \leq 14000$$

よって $12800 \leq 3x + 8000 \leq 14000$

各辺から 8000 を引くと $4800 \leq 3x \leq 6000$

各辺を 3 で割ると $1600 \leq x \leq 2000$

答 1600 m 以上 2000 m 以下

7. 不等式 $|4x+2|<11$ を満たす整数 x の個数を求めよ。

指針 絶対値を含む不等式 $c>0$ のとき不等式 $|x|<c$ の解は $-c<x<c$

解答 $|4x+2|<11$ から $-11<4x+2<11$

各辺から 2 を引くと $-13<4x<9$

各辺を 4 で割ると $-\frac{13}{4}<x<\frac{9}{4}$ ①

$-\frac{13}{4}=-3.25$, $\frac{9}{4}=2.25$ であるから, 不等式 ① を満たす整数 x は

$x=-3, -2, -1, 0, 1, 2$

よって 6 個 答

第1章 章末問題 B

教 p.50

8. 次の式を計算せよ。

(1) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$

(2) $(a+b+c)^2 - (a-b-c)^2$

指針 式の計算の工夫

(1) 各 () 内の前2項と後ろ2項を組み合わせて展開する。

(2) $A^2 - B^2$ の形の因数分解と考える。解答 (1) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$

$$= \{(a+b) + (c+d)\} \{(a+b) - (c+d)\}$$

$$= (a+b)^2 - (c+d)^2$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 + 2cd + d^2)$$

$$= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab - 2cd \quad \text{答}$$

$$\leftarrow a+b=A, \quad c+d=B$$

とおくと

$$(A+B)(A-B)$$

$$= A^2 - B^2$$

(2) $(a+b+c)^2 - (a-b-c)^2$

$$= \{(a+b+c) + (a-b-c)\} \{(a+b+c) - (a-b-c)\}$$

$$= 2a(2b+2c)$$

$$= 4ab + 4ac \quad \text{答}$$

$$\leftarrow a+b+c=A,$$

$$a-b-c=B$$

とおくと

$$A^2 - B^2$$

$$= (A+B)(A-B)$$

教 p.50

9. 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$

(2) $(b+c)(c+a)(a+b) + abc$

指針 式の展開の工夫と因数分解, 1つの文字について整理する因数分解

(1) まず, $(x+1)(x+4) \times (x+2)(x+3) - 24$ として展開する。

(2) 文字を2つ以上含む式では, まず1つの文字について整理する。

解答 (1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$

$$= (x+1)(x+4) \times (x+2)(x+3) - 24$$

$$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24$$

$$= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) = (x^2 + 5x)\{(x^2 + 5x) + 10\}$$

$$= x(x+5)(x^2 + 5x + 10) \quad \text{答}$$

(2) 式を展開し, a について整理する。

$$(b+c)(c+a)(a+b) + abc$$

$$= (b+c)(ac + bc + a^2 + ab) + abc$$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\} + abc$$

$$= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c) + abc$$

$$\begin{aligned}
 &= (b+c)a^2 + \{(b+c)^2 + bc\}a + bc(b+c) \\
 &= \{a + (b+c)\} \{(b+c)a + bc\} \\
 &= (a+b+c)(ab+bc+ca) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \leftarrow \begin{array}{ccc} 1 & b+c \rightarrow (b+c)^2 \\ b+c & bc \rightarrow bc \\ \hline & (b+c)^2 + bc \end{array}
 \end{array}$$

教 p.50

10. $x+y+z=2$, $xy+yz+zx=-1$ のとき, $x^2+y^2+z^2$ の値を求めよ。

指針 式の値 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ を利用する。

解答 $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ であるから

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \\
 &= 2^2 - 2 \cdot (-1) = 6 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.50

11. 次の問いに答えよ。

(1) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$ を計算せよ。

(2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ。

指針 根号を含む式の計算

(1) $1+\sqrt{2}=A$ とおくと, $(A+\sqrt{3})(A-\sqrt{3})$ の展開になる。

(2) (1) の結果を利用できることに着目する。

解答 (1) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\} \{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}$

$$= (1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2} \quad \text{答}$$

(2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{答}$$

教 p.50

12. $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ の整数の部分を a , 小数の部分を b とする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) $b + \frac{1}{b}, b^2 + \frac{1}{b^2}$ の値を求めよ。

指針 無理数の整数の部分・小数の部分

(1) まず $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ の分母を有理化する。

(2) $b^2 + \frac{1}{b^2} = \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 - 2$ であることを利用する。

解答 (1) $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \sqrt{5}+2$

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \text{ から } 2 < \sqrt{5} < 3$$

$$\text{各辺に } 2 \text{ を足して } 4 < \sqrt{5}+2 < 5$$

$$\text{よって } a=4, b=(\sqrt{5}+2)-4=\sqrt{5}-2 \quad \text{答}$$

(2) (1) から

$$b + \frac{1}{b} = \sqrt{5} - 2 + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

$$= \sqrt{5} - 2 + (\sqrt{5} + 2)$$

$$= 2\sqrt{5} \quad \text{答}$$

$$\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot \frac{1}{b} + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}$$

$$\text{よって } b^2 + \frac{1}{b^2} = \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 - 2 = (2\sqrt{5})^2 - 2 = 18 \quad \text{答}$$

教 p.50

13. 定価が 1 個 100 円の商品がある。この商品を、A 店では定価の 12 % 引きで売っている。また、B 店では 10 個までは定価であるが、10 個を超える分について 1 個につき定価の 25 % 引きで売っている。この商品を A 店で買うより B 店で買った方が安くなるのは、何個以上買うときか。

指針 1 次不等式の応用 売り値 = 定価 $\times$ (1 - 割引率) から 1 個の売り値を求める

と A 店では $100 \times (1 - 0.12) = 88$ (円)

B 店では、10 個までは 100 円で、

$$11 \text{ 個からは } 100 \times (1 - 0.25) = 75 \text{ (円)}$$

となる。(A 店での代金) $>$ (B 店での代金) から、不等式を作る。

解答 条件を満たすように x 個買うとすると

$$88x > 100 \times 10 + 75(x - 10)$$

$$\text{すなわち } 88x > 1000 + 75x - 750$$

$$\text{整理すると } 13x > 250 \quad \text{よって } x > \frac{250}{13} = 19.2\cdots$$

これを満たす最小の整数 x は $x = 20$ 答 20 個以上

14. 不等式 $3(x-1) < 2(x+a)$ を満たす最大の整数 x が $x=3$ であるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

指針 不等式を満たす最大の整数 不等式を解くと $x < 2a+3$

これを満たす最大の整数が3となるように a の値の範囲を求める。

解答 $3(x-1) < 2(x+a)$ から $x < 2a+3$ …… ①

① を満たす最大の整数 x が $x=3$ であるから、

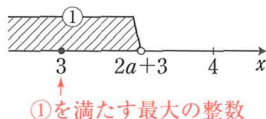
右の図より

$$3 < 2a+3 \leq 4$$

$$\text{ゆえに} \quad 0 < 2a \leq 1$$

よって、求める a の値の範囲は

$$0 < a \leq \frac{1}{2} \quad \text{答}$$



注意 上の解答の4行目の不等式 $3 < 2a+3 \leq 4$ がポイントになる。これを

$$3 \leq 2a+3 < 4 \quad \text{とか} \quad 3 \leq 2a+3 \leq 4 \quad \text{とか} \quad 3 < 2a+3 < 4$$

として解かないように注意する。

研究

15. 方程式 $|x| + |x-2| = 4$ を解け。

指針 絶対値を含む方程式 絶対値記号の中の式を0にする x の値は $x=0$ と $x=2$ であるから、 $x < 0$, $0 \leq x < 2$, $2 \leq x$ で場合分けをして、絶対値記号をはずす。

解答 [1] $x < 0$ のとき

$$\text{方程式は} \quad -x - (x-2) = 4$$

よって $x = -1$ これは $x < 0$ を満たす。

$$\leftarrow x-2 < 0$$

$$|x| = -x$$

$$|x-2| = -(x-2)$$

[2] $0 \leq x < 2$ のとき

$$\text{方程式の左辺は} \quad x - (x-2) = 2$$

よって、方程式の解はない。

$$\leftarrow x-2 < 0$$

$$|x| = x$$

$$|x-2| = -(x-2)$$

[3] $2 \leq x$ のとき

$$\text{方程式は} \quad x + (x-2) = 4$$

よって $x = 3$ これは $2 \leq x$ を満たす。

$$\leftarrow x-2 \geq 0$$

$$|x| = x$$

$$|x-2| = x-2$$

以上から、求める解は $x = -1, 3$ 答